Loi du corps noir

```
<< PhysicalConstants`
```

La physique statistique classique dit que dans un atome le mouvement accéléré de l'électron, particule chargée, doit s'accompagner d'émission ou d'absorption d'énergie électromagnétique. Tous les niveaux sont accessibles (dans la limite où l'électron n'est pas sur une orbite si basse qu'il "toucherait" le noyau). Les niveaux les plus énergétiques correspondent aux rayons X, découverts par Wilhelm Roentgen en 1895.

La loi de Boltzmann de l'équilibre thermique est fondée sur le fait que tous les états du système pour une énergie totale donnée sont également accessibles. On montre alors que le nombre d'état permettant à une parcelle du système d'avoir une énergie ϵ est ~ Exp[$-\frac{\epsilon}{k\,T}$] où k est la constante de Boltzmann.

Appliquée à la cinétique des gaz, cette loi permet d'obtenir que l'énergie d'un gaz parfait monoatomique est U= $\frac{3}{2}$nkT où n est le nombre d'atome, soit U=$\frac{3}{2}$RT pour une môle de gaz avec R=N k où N est le nombre d'Avogadro. Les degrés de liberté sont ici les trois composantes de la vitesse des atomes.

Appliquons la loi aux électrons entourant les molécules ou les atomes, vus comme autant d'oscillateurs indépendants. L'énergie moyenne associée à un oscillateur est alors

$$\bar{\epsilon} = \text{Assuming}\left[k\,T > 0,\ \frac{\int_0^\infty \epsilon\,\text{Exp}\left[-\frac{\epsilon}{k\,T}\right] d\epsilon}{\int_0^\infty \text{Exp}\left[-\frac{\epsilon}{k\,T}\right] d\epsilon}\right]$$

```
k T
```

Quand un corps est porté à haute température, il est excité et ses électrons emmagasinent de l'énergie. Ils la cèdent à l'environnement en émettant de l'énergie sous forme de photons, ce qui rend le corps lumineux. En perdant de l'énergie, le corps se refroidit.
Le même phénomène se produit ègalement à température ambiante mais, comme la loi du corps noir le confirmera, l'émission a lieu hors du domaine visible, dans l'infra-rouge.
On considère ici que la matière n'échange de l'énergie que sous forme radiative et on néglige tous les autres effets (conduction, convection, ...).

Dans son état normal un corps baigne dans un flot d'énergie (échange thermique avec les autres corps voisins et échange avec le rayonnement). C'est de cet échange avec le rayonnement que traite la loi du corps noir.

Un prototype de corps noir peut être constitué d'un gaz dense à température élevée T, opaque dans tous les rayonnements, isolé thermiquement et entouré de miroirs parfaits qui réfléchissent tout rayonnement. Un autre modèle (plus pratique) est un four parfaitement isolé avec un matériau interne porté à température T, n'échangeant rien avec l'extérieur du four et entourant une cavité vide où se propage le rayonnement électromagnétique. Un observateur peut dans les deux cas mesurer le rayonnement en perçant un trou de petit diamètre dans la paroi qui perturbe peu le système.

Dans ce cas, la physique classique dit que l'énergie du rayonnement à la fréquence ν est

$$J[\nu\_] := \frac{4\,\nu^2}{c^2}\,k\,T$$

Ce résultat s' obtient en équilibrant le refroidissement par rayonnement des électrons oscillant à la fréquence ν qui est ~$\nu^2\,k\,T$ avec *l'* absorption par cet oscillateur du rayonnement ambiant qui est ~ J[ν]. Le calcul précis implique de connaître les lois de l'électromagnétisme mais on en fait abstraction ici.

Le problème est que cette loi prédit que le rayonnement en équilibre croît comme ν^2 , et donc que tout corps chauffé devrait émettre de fortes doses de rayons X, ce qui n'est pas le cas. Il doit donc exister une erreur fondamentale dans ce raisonnement et sa correction doit fournir un facteur de coupure à grand ν pour J[ν].

C’est peu ou prou le raisonnement mené par Planck qui a prouvé qu'on pouvait parvenir à un tel facteur de coupure en supposant que les échanges d'énergie sont quantifiés en multiples de hν.

Ainsi les états possibles de l'oscillateur ne sont plus continus mais discrets sous la forme ϵ_0, ϵ_0+hν, ϵ_0 + 2 hν, ϵ_0+3 hν, ... où $\epsilon_0$est le fondamental.

Si on applique la loi de Boltzmann pour obtenir l'énergie moyenne des oscillateurs à fréquence ν, on l’obtient alors sous forme de rapport de deux sommes plutôt que de deux intégrales, soit

$$\overline{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\epsilon_0 + n\,h\,\nu\right) \mathrm{Exp}\left[-\frac{\epsilon_0 + n\,h\,\nu}{k\,T}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{\epsilon_0 + n\,h\,\nu}{k\,T}\right]}$$

En posant $p = \mathrm{Exp}\left[\frac{-h\,\nu}{k\,T}\right]$

$$\overline{\epsilon} = \epsilon_0 + h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\,p^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p^n} = \epsilon_0 + h\nu \frac{\frac{p}{(1-p)^2}}{\frac{1}{1-p}} = \epsilon_0 + h\nu \frac{1}{p^{-1} - 1}$$

$$\overline{\epsilon} = \epsilon_0 + h\nu \frac{1}{\mathrm{Exp}\left[\frac{h\,\nu}{k\,T}\right] - 1}$$

Dans la limite où ν est très petit devant $\frac{k\,T}{h}$, on obtient $\overline{\epsilon}$-ϵ_0 = kT, retrouvant ainsi la limite classique.

Comme c' est uniquement la partie de l' énergie au delà du fondamental qui s' échange, on doit remplacer kT dans l'équation 1 par $\frac{h\,\nu}{\mathrm{Exp}\left[\frac{h\,\nu}{k\,T}\right]-1}$ et on obtient

$$Jp[\nu\_, T\_] := \frac{4\,h\,\nu^3}{c^2 \left(\mathrm{Exp}\left[\frac{h\,\nu}{k\,T}\right] - 1\right)}$$

Ceci constitue la loi de Planck qui est très précisément vérifiée par l' expérience.

En remplaçant ν par $\lambda = \frac{c}{\nu}$:

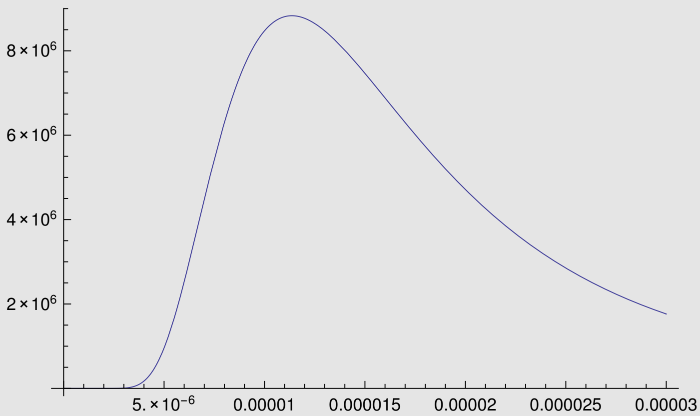
```
Jp2[λ_, T_] = Jp[ν, T] c/λ^2 /. ν -> c/λ
```

$$\frac{4\,c^2\,h}{\left(-1+e^{\frac{c\,h}{k\,T\,\lambda}}\right)\lambda^5}$$

```
Const = {k -> BoltzmannConstant, h -> PlanckConstant, c -> SpeedOfLight}
```

$$\left\{k \to \frac{1.38065\times10^{-23}\,\text{Joule}}{\text{Kelvin}},\ h \to 6.62607\times10^{-34}\,\text{Joule Second},\ c \to \frac{299\,792\,458\,\text{Meter}}{\text{Second}}\right\}$$

```
Plot[Jp2[λ Meter, 255 Kelvin] /. Const /. Joule -> Meter^3 Second ,
 {λ, 0 , 30 × 10^-6}]
```



Loi de Stephan

```
Assuming[c h/(k T) > 0, ∫_0^∞ Jp2[λ, T] dλ]
```

$$\frac{4\,k^4\,\pi^4\,T^4}{15\,c^2\,h^3}$$