Géopotentiel et coordonnée verticale pression

Définitions:
- altitude géopotentielle: $z(x,y,p,t)$ altitude de la surface de pression p
- géopotentiel: $\Phi(x,y,z,t) = g\, z(x,y,p,t)$

La pression et la température se mesurent facilement par des instruments in situ embarqués sur les radiosondes. L'altitude est moins facilement mesurable. On peut l'obtenir par mesure radar (réflecteur sur la sonde, radar au sol) ou avec un GPS (encore coûteux sur des sondes non récupérables). On peut aussi l'obtenir, dans l'hypothèse hydrostatique, par intégration depuis le sol de l'équation $\partial p/\partial z + \rho g = 0$, soit

$$z(x,y,p,t) = -\int_{p_{\mathrm{sol}}(x,y,t)}^{p} \frac{RT'(x,y,p',t)}{gp'}\,dp'.$$

Il est donc naturel de représenter le résultat des sondages météorologiques sous la forme de cartes du géopotentiel.

Il existe d'autres raisons d'utiliser la fonction géopotentiel. Elles sont liées à l'utilisation de la pression p comme coordonnée verticale à la place de l'altitude z.

L'utilisation de p comme coordonnée verticale est rendue possible par l'approximation hydrostatique $\partial p/\partial z + \rho\, g= 0$. Cette relation implique que p est une variable décroissant de manière verticale avec l'altitude (la pression hydrostatique est simplement liée au poids de la colonne d'air située au dessus) et permet de passer de z à p.

On passe des coordonnées (x,y,z) à (x,y,p).

Dans les nouvelles coordonnées, la vitesse verticale est $\omega = Dp/Dt$. Elle est négative pour les mouvements ascendants et positive pour les mouvements descendants. La vitesse horizontale est inchangée mais elle est définie à pression constante plutôt qu'à altitude constante.

Plusieurs propriétés intéressantes en découlent:

- Les mouvements de l'air sont « incompressibles » en coordonnées *(x,y,p)*. En effet l'élément de masse $\rho\, dx\, dy\, dz$ devient $1/g\, dx\, dy\, dp$, de sorte que la masse volumique dans les nouvelles coordonnées devient $1/g$ qui est une constante. Par conséquent, l'équation de continuité $D\rho/Dt + \rho\, \mathrm{div}_{xyz}\, \boldsymbol{u} = 0$ est remplacée par $\mathrm{div}_{xyp}\, \boldsymbol{u} = 0$, soit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y,p} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x,p} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right|_{x,y} = 0$$

Cette relation simplifie considérablement l'analyse des équations du mouvement comme on le verra par la suite.

Le terme $-1/\rho$ grad $p|_z$ figurant à droite de l'équation du mouvement horizontal peut être remplacé par – grad $\Phi|_p$.

Première démonstration utilisant les règles de changement de variables.
Rappel: pour passer des variables *(x,y,z)* à *(X,Y,Z)*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{Y,Z}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{y,z}\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right|_{Y,Z}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x,z}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right|_{Y,Z}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right|_{Y,Z}$$

On utilise cette relation pour passer de (x,y,z) à (x,y,p).

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{y,p}=0=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{y,z}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right|_{y,p}}_{=1}+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{x,z}\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{y,p}}_{=0}+\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{x,y}}_{=-\rho g}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y,p}$$

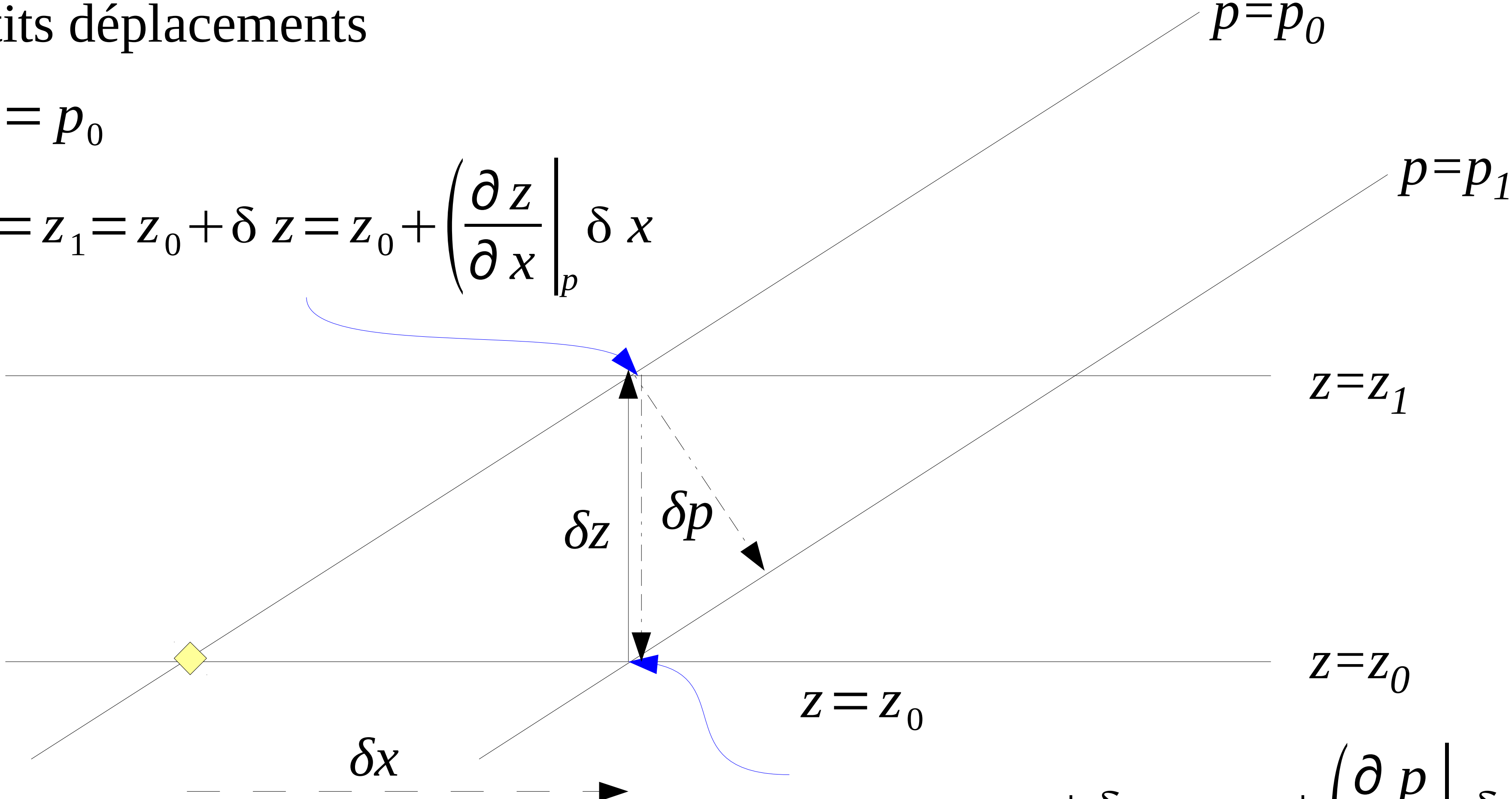
Il reste donc

$$0=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{y,z}-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{y,p}$$

Deuxième démonstration utilisant de petits déplacements

$$p = p_0$$

$$z = z_1 = z_0 + \delta z = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p \delta x$$



$$z = z_0$$

$$p = p_1 = p_0 + \delta p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right|_z \delta x$$

Donc $\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right|_z \delta x$ et $\delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p \delta x$

Selon la loi hydrostatique $\frac{\delta p}{\delta z} = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right|_x = \rho g$, d'où $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right|_z = \left(\frac{\partial g z}{\partial x}\right|_p$