

DEVOIR A RENDRE

B. Legras

10 décembre 2014, à rendre le 7 janvier 2015

1 Densité potentielle

Le but de cet exercice est de déterminer des invariants ayant la dimension d'une densité pour les transformations adiabatiques humides.

Liste des notations employées dans cet exercice (toutes les quantités sont par unité de masse) :

R_d	constante des gaz pour l'air sec
R_v	constante des gaz pour la vapeur d'eau
$\epsilon = R_d/R_v$	
c_{pd}	capacité calorifique pression constante pour l'air sec
c_{pv}	capacité calorifique pression constante pour la vapeur d'eau
c_{vd}	capacité calorifique volume constant pour l'air sec
c_{vv}	capacité calorifique volume constant pour la vapeur d'eau
c_l	capacité calorifique de l'eau liquide
c_i	capacité calorifique de la glace
p_d	pression de l'air sec
e	pression partielle de la vapeur d'eau
e^*	pression partielle saturante de la vapeur d'eau
$p = p_d + e$	pression totale
ρ_d	densité de l'air sec
ρ_v	densité de la vapeur d'eau
ρ_l	densité de l'eau liquide dans la parcelle d'air
ρ_i	densité de la glace dans la parcelle d'air
ρ	densité totale
$r = \rho_v/\rho_d$	rapport de mélange de la vapeur d'eau en masse
$r_l = \rho_l/\rho_d$	rapport de mélange de l'eau liquide
$r_i = \rho_i/\rho_d$	rapport de mélange de la glace
$r_T = r + r_l + r_i$	rapport de mélange de l'eau totale
L	chaleur latente de vaporisation
L_i	chaleur latente de sublimation

1. Montrez que

$$e = \frac{r}{\epsilon} p_d, \quad \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{r}{1 + r_T}, \quad \frac{\rho_d}{\rho} = \frac{1}{1 + r_T}.$$

Exprimez de même les rapports p_d/p et e/p .

2. Montrez que l'entropie de l'air sec est par unité de masse

$$s_d = -c_{pd} \ln \frac{\rho_d}{\rho_0} + c_{vd} \ln \frac{p_d}{p_0}$$

où ρ_0 et p_0 sont des constantes arbitraires de normalisation.

3. En vous appuyant sur une expression analogue pour la vapeur d'eau, et en utilisant les relations établies en 1), montrez que l'entropie de l'air humide non saturé (avec $r_l = 0$ et $e < e^*$) est (par unité de masse d'air sec)

$$s = -(c_{pd} + rc_{pv}) \ln \frac{\rho}{\rho_0} + (c_{vd} + rc_{vv}) \ln \frac{p}{p_0} + F(r)$$

(il n'est pas requis d'explicitier $F(r)$).

4. Montrez que cela permet d'introduire une densité potentielle

$$\varrho_{\text{pot}} = \rho \left(\frac{p_0}{p} \right)^\chi$$

conservée pour toute transformation adiabatique réversible de l'air humide non saturé. Donnez l'expression de χ .

5. On s'intéresse maintenant au cas de l'air humide saturé ($e = e^*$ et $r_l > 0$). On suppose qu'il n'y pas de glace mais seulement de l'eau liquide. On donne l'entropie de l'eau liquide $s_l = c_l \ln(T/T_0)$ et la relation $L = T(s_v^* - s_l)$ où s_v^* indique l'entropie de la vapeur d'eau saturante. Ecrivez l'entropie de l'air humide saturé et en éliminant r au profit de r_T et r_l faites apparaître L en facteur de r_l . On suppose que toute l'eau liquide est entraînée dans l'ascendance de la parcelle, donc que r_T est conservé.
6. Développer l'expression de l'entropie en éliminant toujours r (indication : utilisez $\epsilon + r = \epsilon + r_T - r_l = (\epsilon + r_T)(1 - r_l/(\epsilon + r_T))$).
7. En manipulant l'expression de l'entropie par l'ajout de termes constants appropriés, faites apparaître que l'on peut définir une densité potentielle équivalente liquide

$$\varrho_{\text{el}} = \rho \left(\frac{p_0}{p} \right)^\chi \left(1 - \frac{r_l}{\epsilon + r_T} \right)^A \left(1 - \frac{r_l}{r_T} \right)^B \exp(LC).$$

Donnez les expressions de A , B et C .

8. Considérez maintenant le cas où l'air est sursaturé dans le nuage. On introduit une variable humidité relative $H = e/e^*$. Trouvez le terme complémentaire dans ϱ_{el} .
9. Considérez maintenant le cas où le nuage contient à la fois de l'eau (surfondue) et de la glace. On distingue la pression de valeur saturante par rapport à la glace e_i^* et par rapport à l'eau liquide e_l^* et on définit deux humidités relatives H_l et H_i . Trouver la nouvelle expression de ϱ_{eil} (i ajouté pour glace).
10. A quoi se ramène cette expression lorsque $r_l = r_i = 0$? Que peut-on en déduire en comparant ϱ_{eil} à la densité de l'environnement là où l'air du nuage est entraîné?