

## TOURBILLON PONCTUEL ET VORTICIMÈTRE

Patrick BALLARD

17 septembre 2002

Le but de ce problème est l'analyse de l'expérience présentée dans le film projeté lors du cours magistral de cinématique.

### 1 Description Eulerienne du tourbillon ponctuel.

L'espace étant rapporté à des coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta, z)$ , on considère le mouvement dont la description Eulerienne est donnée par le champ de vitesse :

$$\underline{U}(r, \theta, z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta \quad (r \neq 0).$$

**1.1.** *Calculer le tenseur taux de déformation  $\underline{d}(\underline{x}, t)$ , le taux de dilatation volumique, les taux d'allongement unitaires selon (les directions matérielles repérées par)  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$  ainsi que le taux de glissement entre ces deux directions. Déterminer les directions principales de  $\underline{d}$ .*

En utilisant l'expression générale du gradient d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques, il vient :

$$\underline{\underline{\text{grad} U}} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r),$$

qui est symétrique et donc se confond avec  $\underline{d}(\underline{x})$ . Le taux de dilatation volumique est :

$$\text{div } \underline{U}(\underline{x}) = \text{tr } \underline{d}(\underline{x}) = 0,$$

la transformation associée est donc localement isochore. Les taux d'extension selon les directions matérielles définies par  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$  sont nuls et le taux de glissement entre ces deux directions est :

$$\dot{\theta} = -\frac{\Gamma}{\pi r^2}.$$

L'angle a tendance a « s'ouvrir » et ce d'autant plus vite que l'on est proche de l'axe ( $Oz$ ). Les direction principales sont les deux bissectrices de  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$  ainsi que  $\underline{e}_z$ . Les valeurs propres (« taux d'extensions principaux ») sont :

$$-\frac{\Gamma}{2\pi r^2}, \quad \frac{\Gamma}{2\pi r^2}, \quad 0.$$

**1.2.** *Calculer le tenseur taux de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$  ainsi que le vecteur tourbillon  $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$ . Calculer la circulation de  $\underline{U}(r, \theta, z)$  le long d'une courbe fermée du plan  $(r, \theta)$  et entourant l'axe  $Oz$ . Commenter les résultats obtenus du point de vue du nom de « tourbillon ponctuel » donné à cet écoulement.*

Comme  $\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{U}$  est symétrique, le tenseur taux de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$  ainsi que le vecteur tourbillon sont identiquement nuls dans tout l'espace privé de l'axe ( $Oz$ ).

La formule de Stokes montre que la circulation de  $\underline{U}(r, \theta, z)$  le long d'une courbe fermée du plan  $(r, \theta)$  et entourant l'axe  $Oz$  est identique à celle le long d'un petit cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $\varepsilon$  et d'axe ( $Oz$ ). Un calcul explicite élémentaire montre alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \underline{U}(\underline{x}) \cdot \underline{\tau}(\underline{x}) \, dl = \Gamma.$$

Il faut bien prendre garde que le champ de vitesse n'a pas été défini sur l'axe ( $Oz$ ) et qu'il y présente une singularité. Le calcul que l'on a fait de  $\underline{d}$  n'est valable qu'en dehors de l'axe ( $Oz$ ). En fait, le vecteur tourbillon est non nul mais entièrement concentré sur l'axe ( $Oz$ ) à travers ce que l'on appelle une mesure de Dirac. La situation est totalement analogue à celle du potentiel créé par une charge ponctuelle qui est harmonique sauf sur la charge. Ceci justifie la terminologie de « tourbillon ponctuel » qui se réfère en fait à l'analyse du mouvement plan.

## 2 Passage à la description Lagrangienne.

**2.1.** *Déterminer les lignes de courant ainsi que les trajectoires. En déduire la description Lagrangienne du mouvement.*

Ces deux notions ne doivent pas être confondues. Les lignes de courant concernent la configuration actuelle  $\kappa_t$  ; ce sont les courbes enveloppes du champ des vitesses. Elles sont définies par la condition :

$$\frac{d}{ds} \underline{x}(s) = \lambda(s) \underline{U}(\underline{x}(s), t),$$

où la courbe est paramétrée par la variable réelle  $s$  et où  $\lambda$  est un coefficient de proportionnalité arbitraire. On peut d'ailleurs reparamétriser les lignes de courant

de sorte que  $\lambda \equiv 1$ . En n'oubliant pas de dériver les vecteurs de la base locale en coordonnées cylindriques, la condition s'écrit :

$$\frac{d}{ds} r \underline{e}_r + r \frac{d}{ds} \theta \underline{e}_\theta + \frac{d}{ds} z \underline{e}_z = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta,$$

qui donne :

$$\begin{aligned} r &= \text{constante}, \\ \theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2} s + \text{constante}, \\ z &= \text{constante}. \end{aligned}$$

Les lignes de courant sont les cercles orthogonaux à l'axe ( $Oz$ ) et centrés sur celui-ci.

Les trajectoires sont définies par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U}(\underline{x}(t), t),$$

qui montre clairement que dans le cas où le champ Eulerien des vitesses  $\underline{U}$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$  (on dit que le mouvement est *stationnaire* ou *permanent*), les trajectoires se confondent avec les lignes de courant. Ainsi, ici, les trajectoires sont aussi des cercles centrés sur l'axe ( $Oz$ ). Il faut également ajouter des précisions sur l'horaire de parcours. Les cercles sont parcourus à vitesse constante et un tour complet s'effectue en une durée de  $4\pi^2 r^2 / \Gamma$ .

La description Lagrangienne du mouvement est donc :

$$\begin{aligned} r &= R, \\ \theta &= \Theta + \frac{\Gamma}{2\pi R^2} t, \\ z &= Z \end{aligned}$$

où l'on a noté  $(R, \Theta, Z)$  les coordonnées cylindriques d'une particule  $M_0$  dans la configuration de référence et  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques de la même particule transportée par le mouvement au point  $M$  de la configuration actuelle  $\kappa_t$ . On notera aussi  $(\underline{E}_R, \underline{E}_\Theta, \underline{E}_Z)$  les vecteurs de la base locale en  $M_0$  et  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$  ceux de la base locale en  $M$ .

**2.2.** *Calculer le gradient  $\underline{F}(\underline{X}, t)$  de la transformation entre les configurations de référence (définie par  $t = 0$ ) et actuelle. Constaté que la transformation s'écrit localement comme la composée d'un glissement simple avec une rotation que l'on précisera. En déduire la décomposition polaire  $\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{S}$  du gradient de la transformation.*

Pour déterminer le gradient, on écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{M}_0 &= dR \underline{E}_R + R d\Theta \underline{E}_\Theta + dZ \underline{E}_Z, \\ d\underline{M} &= dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z, \\ &= dR \underline{e}_r + R \left( d\Theta - \frac{\Gamma}{\pi R^3} t dR \right) \underline{e}_\theta + dZ \underline{e}_z, \end{aligned}$$

qui donne :

$$\underline{F}(OM_0, t) = \underline{e}_r \otimes \underline{E}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{E}_Z - 2\alpha(R)t \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_R,$$

où l'on a posé :

$$\alpha(R) = \frac{\Gamma}{2\pi R^2}.$$

La comparaison de l'expression obtenue pour  $\underline{F}$  avec les résultats obtenus lors de la PC 2 montre que la déformation est localement assimilable à celle correspondant au glissement simple où le trièdre  $(-\underline{E}_\Theta, \underline{E}_R, \underline{E}_Z)$  jouerait en  $M_0$  le rôle du trièdre  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  et  $\alpha(R)t$  remplaçant  $\alpha(t)$ . Plus précisément, en introduisant :

$$\underline{U}(R, t) = \underline{e}_r \otimes \underline{E}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{E}_Z,$$

on a :

$$\underline{F}(R, \Theta, Z, t) = \underline{U}(R, t) \cdot (\underline{\mathbb{1}} - 2\alpha(R)t \underline{E}_\Theta \otimes \underline{E}_R),$$

qui montre que la transformation homogène tangente en  $M_0$  est le produit du glissement simple d'amplitude  $\alpha(R)t$  dans les axes  $(-\underline{E}_\Theta, \underline{E}_R, \underline{E}_Z)$  suivi de la rotation d'angle  $\alpha(R)t$  autour de  $(OZ)$ , qui correspond à  $\underline{U}(R, t)$ . On en déduit également que  $\det \underline{F}(R, \Theta, Z, t) = 1$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variation locale de volume. Les résultats obtenus lors de la PC 2 concernant la décomposition polaire du gradient de la transformation de glissement simple permettent d'obtenir instantanément la décomposition polaire du gradient de la transformation considérée. La rotation  $\underline{R}$  est la composée de la rotation d'angle  $-\arctg(\alpha(R)t)$  autour de  $(OZ)$  (correspondant au glissement simple) suivie de la rotation d'angle  $\alpha(R)t$  autour de  $(OZ)$  (correspondant à  $\underline{U}$ ). Au total,  $\underline{R}$  est une rotation d'angle :

$$\beta(R, t) = \alpha(R)t - \arctg(\alpha(R)t)$$

autour de  $(OZ)$ . Pour ce qui est de  $\underline{S}$ , les résultats obtenus à la PC2 donnent immédiatement :

$$\underline{S}(\underline{X}, t) = \lambda(\underline{U}_1(t)) \frac{\underline{U}_1(t)}{|\underline{U}_1(t)|} \otimes \frac{\underline{U}_1(t)}{|\underline{U}_1(t)|} + \lambda(\underline{U}_2(t)) \frac{\underline{U}_2(t)}{|\underline{U}_2(t)|} \otimes \frac{\underline{U}_2(t)}{|\underline{U}_2(t)|} + \underline{E}_Z \otimes \underline{E}_Z,$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(t) &= \frac{\underline{E}_R - \left[ \sqrt{1 + (\alpha(R)t)^2} - \alpha(R)t \right] \underline{E}_\Theta}{\sqrt{1 + (\alpha(R)t)^2}}, \\ \underline{U}_2(t) &= \frac{\underline{E}_R + \left[ \sqrt{1 + (\alpha(R)t)^2} + \alpha(R)t \right] \underline{E}_\Theta}{\sqrt{1 + (\alpha(R)t)^2}}, \\ \lambda(\underline{U}_1(t)) &= \sqrt{1 + (\alpha(R)t)^2} + \alpha(R)t, \\ \lambda(\underline{U}_2(t)) &= \sqrt{1 + (\alpha(R)t)^2} - \alpha(R)t \end{aligned}$$

(le triplet  $(\underline{U}_1(t), \underline{U}_1(t), \underline{E}_Z)$  constituant, on le rappelle, les direction propre de la déformation entre configuration initiale  $\kappa_0$  et configuration actuelle  $\kappa_t$ ).

On constate que le taux de rotation  $\underline{\Omega}$  est partout nul en dehors de l'axe  $Oz$ , alors que la rotation  $\underline{R}$  n'est nulle part égale à  $\underline{1}$  en dehors de l'instant initial. Au vu des interprétations données en cours, pour  $\underline{R}$  en terme de rotation de l'élément de volume, d'une part, et pour  $\underline{\Omega}$  en terme de vitesse de rotation de l'élément de volume, d'autre part, ce résultat peut surprendre. La suite du problème a pour but de lever cette éventuelle contradiction apparente et d'analyser le mouvement du vorticimètre dans cet écoulement.

### 3 Vitesse de rotation d'une direction matérielle dans un écoulement plan.

On considère un écoulement en description Eulerienne donnée par  $\underline{U}$ , supposé plan ( $\underline{U} \cdot \underline{e}_z = 0$ ). Soit  $\underline{n}$  un vecteur unitaire fixe et  $\underline{N}_1$  un vecteur unitaire repérant une direction matérielle (entraîné par le mouvement), tous deux dans le plan de l'écoulement. On note  $\varphi_1$  l'angle entre  $\underline{n}$  et  $\underline{N}_1$ .

#### 3.1. Calculer $\dot{\varphi}_1$ .

On a facilement :

$$\underline{n} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \cdot \underline{N}_1 = (\underline{N}_1 \cdot \underline{d} \cdot \underline{N}_1) \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1. \quad (1)$$

Comme c'est  $\dot{\varphi}_1$  qui nous intéresse, on peut faire n'importe quel choix pour la direction fixe  $\underline{n}$ . On fait le choix  $\underline{n} = \underline{N}_2$  où  $\underline{N}_2$  est défini par  $\varphi = -\pi/2$ . On a alors :

$$\dot{\varphi}_1 = \underline{N}_2 \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \cdot \underline{N}_1.$$

**3.2.** Soient  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_2$  deux vecteurs unitaires du plan de l'écoulement, orthogonaux entre eux. On note respectivement  $\dot{\varphi}_1$  et  $\dot{\varphi}_2$  les vitesses de rotation des directions matérielles définies par ces vecteurs. Montrer que la moyenne de ces vitesses est donnée par :

$$\frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} = \underline{\Omega} \cdot \underline{e}_z. \quad (2)$$

En appelant  $\dot{\varphi}_2$  la vitesse de rotation de la direction matérielle repérée par  $\underline{N}_2$  vis-à-vis d'une direction fixe, on a aussi :

$$\dot{\varphi}_2 = -\underline{N}_1 \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \cdot \underline{N}_2,$$

et donc :

$$\frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} = \underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{N}_1 = \underline{N}_2 \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{N}_1) = \underline{\Omega} \cdot \underline{e}_z.$$

Ainsi, on a montré que la moyenne des vitesses de rotation (par rapport à une direction fixe) de deux directions orthogonales entre elles est  $\underline{\Omega} \cdot \underline{e}_z$ . Il en résulte aisément que la moyenne des vitesses de rotation (par rapport à une direction fixe) de toutes les directions matérielles du plan est  $\underline{\Omega} \cdot \underline{e}_z$ .

## 4 Analyse du vorticimètre

Dans cette partie, on suppose qu'un fluide, au sein d'un dispositif expérimental *ad hoc*, réalise l'écoulement baptisé précédemment « tourbillon ponctuel ». Cet écoulement sera supposé de hauteur finie et on s'intéresse au mouvement de trois types d'équipage flottant à la surface de l'écoulement.

- Équipage 1. Il s'agit d'un croisillon constitué par l'assemblage rigide de deux petits segments orthogonaux et *restant orthogonaux* au cours du mouvement (c'est le « vorticimètre » du film).
- Équipage 2. Il s'agit du même croisillon que précédemment, à l'exception du fait que l'assemblage entre les deux petits segments constitue maintenant une articulation parfaite (l'angle entre les deux segments est totalement libre d'évoluer).
- Équipage 3. Cette fois-ci, l'assemblage entre les deux petits segments est rigide, mais l'angle formé par ceux-ci n'est plus droit mais égal à  $\varphi_0$ .

Naturellement, le mouvement d'un quelconque de ces équipages flottant à la surface du fluide dépend des efforts d'interaction entre le fluide et le croisillon. Ces efforts dépendent eux-mêmes de la nature du fluide en jeu. Cependant, sous réserve que le fluide soit suffisamment visqueux, que les dimensions et l'inertie de l'équipage flottant soient suffisamment faibles, il est naturel d'admettre que :

- le centre du croisillon reste sur la particule matérielle sur laquelle il a été placé initialement,
- la vitesse de rotation de chacun des segments du croisillon articulé coïncide avec celle de chacune des directions matérielles qu'il repère, tandis que, dans le cas des assemblages rigides, la vitesse de rotation de l'ensemble est la demi-somme des vitesses de rotation qu'aurait chacun des segments s'il pouvait se mouvoir indépendamment de l'autre.

**4.1.** *À l'instant initial, on place l'équipage 1 en un point quelconque de l'écoulement distinct du centre. Indiquer comment évolue, au cours du temps, l'angle que fait le croisillon avec une direction fixe (expérience du film).*

La formule (2) montre que la vitesse de rotation du croisillon par rapport à une direction fixe est nulle. Cet angle est donc constant, ainsi qu'observé lors de la projection du film.

**4.2.** *À l'instant initial, on place l'équipage 2 en un point quelconque de l'écoulement distinct du centre, les deux segments étant alignés avec les deux directions (orthogonales) propres  $\underline{U}_1(T), \underline{U}_2(T)$  de la déformation entre instant initial et instant  $T$ . Indiquer la direction de chacun des deux segments à l'instant  $T$ . Que peut-on dire de l'angle du croisillon aux instants intermédiaires  $t \in ]0, T[$  ?*

Les directions propres de la déformation entre instant initial et instant  $T$  sont les triplets de directions deux-à-deux orthogonales sur la configuration initiale, transportées par le mouvement en un triplet de directions deux-à-deux orthogonales sur la configuration à l'instant  $T$ . Il en résulte que le croisillon est de nouveau orthogonal à l'instant  $T$  : il a subi la rotation rigide  $\underline{R}(\underline{X}, T)$ . Ainsi, il a tourné d'un angle :

$$\beta(R, T) = \alpha(R)T - \arctg(\alpha(R)T).$$

Si le croisillon était perpendiculaire à un instant  $t \in ]0, T[$ , cela signifierait que  $\underline{U}_1(T), \underline{U}_2(T)$  sont non seulement directions propres de  $\underline{e}(T)$  mais également de  $\underline{e}(t)$ , ce qui n'est clairement pas le cas au vu du calcul des directions propres de  $\underline{e}(t)$  effectué dans la première partie.

Cela est également cohérent avec le fait que le croisillon articulé a tourné alors que le croisillon rigide a conservé son orientation. Si le croisillon articulé était resté, comme le croisillon rigide, orthogonal au cours de son mouvement, cela signifierait que le caractère rigide ou libre de l'assemblage ne joue aucun rôle. En conséquence, si tel était le cas, on devrait observer la même rotation pour chacun des croisillons, ce qui est mis en défaut.

**4.3.** *À l'instant initial, on place l'équipage 3 en un point quelconque de l'écoulement distinct du centre. Indiquer comment évolue, au cours du temps, l'angle que fait le croisillon avec une direction fixe.*

Considérons la direction matérielle définie par :

$$\underline{N}_1 = \cos \varphi_1 \underline{e}_x + \sin \varphi_1 \underline{e}_y,$$

et exprimons sa vitesse de rotation à l'aide de la formule (1). On calcule alors :

$$\begin{aligned} \underline{e}_x \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \cdot \underline{N}_1 &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \sin(\varphi_1 - 2\theta), \\ \underline{N}_1 \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \cdot \underline{N}_1 &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \sin(2\varphi_1 - 2\theta). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\varphi_1$  est solution de l'équation différentielle :

$$\sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} [\cos \varphi_1 \sin(2\varphi_1 - 2\theta) - \sin(\varphi_1 - 2\theta)],$$

soit encore :

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \cos(2\varphi_1 - 2\theta).$$

Revenons maintenant au croisillon rigide d'angle  $\varphi_0$ . On note  $\varphi_1$  et  $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0$  l'angle entre les directions de chacun des segments et  $\underline{e}_x$ . On pose alors :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \theta, \\ &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\Gamma}{2\pi R^2} t. \end{aligned}$$

En utilisant :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

il vient aisément que  $\psi$  satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{\psi} = -\frac{\Gamma}{2\pi R^2} (1 + \cos \varphi_0 \cos 2\psi).$$

Cette équation est à variable séparable et s'intègre facilement. A cet effet, on indique que :

$$\frac{d}{d\psi} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi_0} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_0}{2} \right) \operatorname{tg} \psi \right] \right\} = \frac{1}{1 + \cos \varphi_0 \cos 2\psi}.$$

Il en résulte que la solution de l'équation différentielle qui s'annule en  $t = 0$  s'écrit :

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi R^2} t \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)} - \pi E \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi^2 R^2} t + \frac{1}{2} \right),$$

où  $E(\cdot)$  désigne la fonction « partie entière ». On obtient ainsi la solution :

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} t - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi R^2} t \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)} - \pi E \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi^2 R^2} t + \frac{1}{2} \right).$$

L'évolution au cours du temps de cet angle est représenté sur la figure suivante pour différentes valeurs de l'angle  $\varphi_0$  du croisillon. Si un vorticimètre à angle droit conserve un angle constant avec une direction arbitraire, on observe deux phénomènes pour ce qui est de l'angle que ferait un vorticimètre à angle non-droit avec une direction fixe :

- d'une part, une dérive proportionnelle au temps (et d'autant plus grande que l'angle du croisillon est petit) de la valeur « moyenne » (sur un temps caractéristique à définir) de cet angle,
- d'autre part, l'apparition d'oscillation autour de cette valeur moyenne.

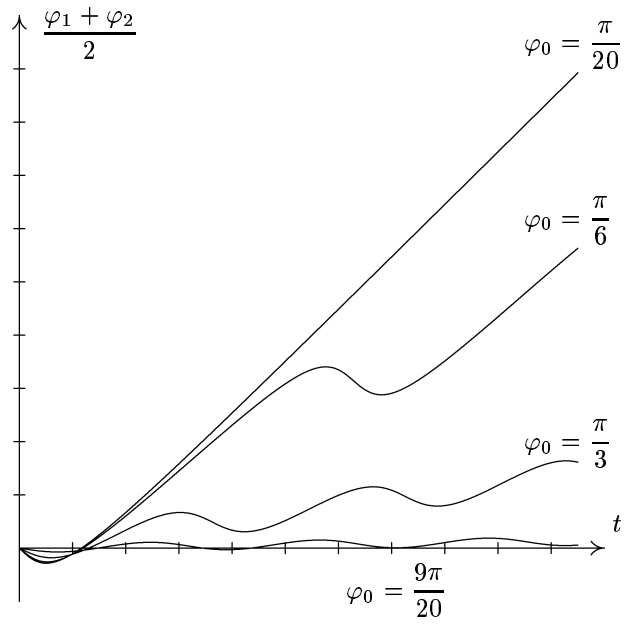


FIG. 1 – Rotation de l'angle au cours du temps pour diverses valeurs de  $\varphi_0$ .