

Modélisation des efforts, tenseur des contraintes de Cauchy.

(stegner@lmd.ens.fr <http://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431>)

5 octobre 2004

1 Mouvement d'une membrane sphérique

On considère les mouvements d'une membrane sphérique de masse M et de rayon $R(t)$ de centre O immobile par rapport à un référentiel galiléen. On néglige la gravité et on note $u = \dot{R}$. La puissance virtuelle des efforts intérieurs est supposée être de la forme $P_{(i)}(\hat{u}) = -F(R)\hat{u}$ où F est une fonction scalaire donnée.

1. Donner l'équation régissant $R(t)$. Quel type de mouvement à la membrane lorsque $F(R) = K(R - R_0)$ avec $K > 0$ et $R_0 = R(t = 0)$.
2. La membrane est entourée d'un fluide homogène, incompressible, de masse volumique ρ s'étendant jusqu'à l'infini. Ecrire le principe des puissances virtuelles au système membrane + fluide.
3. En supposant que le mouvement dans le fluide vérifie la symétrie sphérique, déterminez le champ de vitesse réel.
4. Quel mouvement virtuel $\hat{U}(r)$ annule la puissance virtuelle des efforts intérieurs au fluide ?
5. En utilisant ce qui précède, donner l'équation pour $R(t)$ et étudier les petits mouvements.

2 Champ de contrainte dans un réservoir cylindrique sous pression.

On considère un milieu continu occupant le volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ constitué d'une portion de cylindre de révolution de hauteur l , de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e . Ce tube est soumis à une pression uniforme p sur sa paroi latérale interne $r = r_i$, la paroi latérale externe étant libre de contrainte. L'extrémité supérieure est soumise à des efforts surfaciques homogènes $F \underline{e}_z$ et l'extrémité inférieure aux efforts surfaciques $-F \underline{e}_z$. On néglige les efforts volumique issus de la pesanteur.

1. Les efforts extérieurs sont-ils compatibles avec l'équilibre du tube ?
2. Expliciter l'équation d'équilibre ainsi que les conditions aux limites pour le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$.
3. En supposant que le champ de contrainte ne dépend que de r , à quelles conditions $\underline{\underline{\sigma}}$ équilibre-t-il les efforts extérieurs considérés ?
4. Déterminez un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ qui équilibre les efforts extérieurs.
5. En supposant le champ de contrainte à symétrie cylindrique, calculer la valeur moyenne :

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr$$

en appliquant le principe des puissances virtuelles avec le mouvement virtuel défini par $\hat{U} = D \underline{e}_r$, où D est une constante réelle arbitraire. Interpréter le résultat obtenu (formule dite des "chaudronniers") notamment lorsque le tube est mince.