

Alexandre STEGNER

CNRS Laboratoire de Météorologie Dynamique

stegner@lmd.ens.fr

ENSEIGNEMENTS :

Ecole Polytechnique

- PC “Mécanique des milieux continus”

(<http://gerswhin.ens.fr/stegner/PC-Mec431>)

- EA Majeure Planète Terre “Des expériences de laboratoire aux écoulements géophysiques”

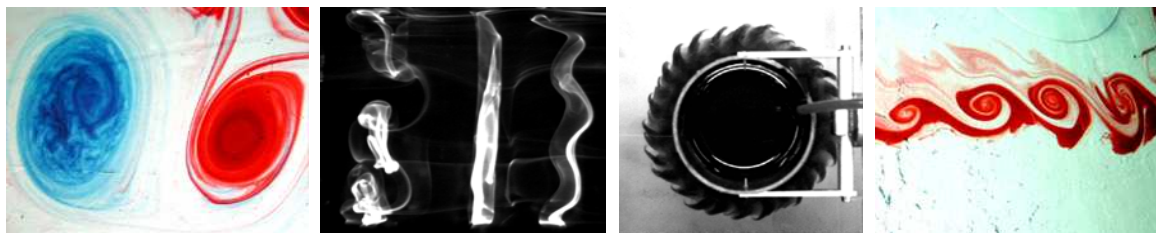
(<http://gerswhin.ens.fr/stegner/EA-Mec584>)

ENSTA - DEA Océano-Météo-Environnement (OME)

- Cours “Modélisation physique des fronts océaniques”

(<http://gershwin.ens.fr/stegner/Ensta-A4-6>)

RECHERCHE :



Dynamique des fluides géophysiques, instabilités, ondes, structures cohérentes, interaction sable-fluide.

(<http://gershwin.ens.fr/stegner>)

Qu'est-ce qu'un tenseur ?

On connaît les :

- **scalaire** (ex : norme $\|\underline{X}\|$, produit scalaire $\underline{e}_1.\underline{X},\dots$)

- **vecteur** $\underline{V} = V_1\underline{e}_1 + V_2\underline{e}_2 + V_3\underline{e}_3 = V_i\underline{e}_i$

(*sommation sur les indices répétés !*)

Pratique : matrice uni-colonne associée à un vecteur.

- **gradient d'un champ scalaire** $\tau(\underline{X})$

(ex : *température, densité, concentration...*)

on construit un vecteur $\underline{\nabla}\tau = (\partial\tau/\partial X_i)\underline{e}_i$

gradient d'un champ de vecteurs ?

(ex : déplacement $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$, vitesse $\underline{U}(\underline{X})$)

on construit une matrice $(\nabla\xi)_{ij} = \partial\xi_i/\partial X_j$

mais attention : dépend du choix de la base $\{\underline{e}_i\}$!

La notion de tenseur est une généralisation de la notion de vecteur en tant “*qu'être mathématique*” invariant par changement de base.

Préambule (rappels et notations)

Soit un espace euclidien E de dimension n , avec un produit scalaire (noté $\underline{a}.\underline{b}$).

1. vecteurs de E $\underline{V} = \sum_{i=1}^n V^i \underline{e}_i = V^i \underline{e}_i$
(*sommation sur les indices répétés !*)
2. règles de changement de base de $\{\underline{e}_i\}$ à $\{\underline{e}'_i\}$:
 $\underline{e}'_i = (B)_i^j \underline{e}_j$ indice en “bas” = indice **covariant**
 $V'^j = (B^{-1})^j_i V^i$ indice en “haut” = indice **contra-variant**
3. symbole de kronecker
 $\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta_j^i = \delta^{ij} = (0 \text{ si } i \neq j; 1 \text{ si } i = j)$
4. $\{\underline{e}^j\}$ **base duale** de $\{\underline{e}_i\}$ telle que : $\forall (i, j) \underline{e}^j . \underline{e}_i = \delta_i^j$
en posant $\underline{e}_i . \underline{e}_j = g_{ij}$ et $\underline{e}^j . \underline{e}_i = \delta_i^j$ on vérifie :

$$\begin{aligned}\underline{V} &= (\underline{V} . \underline{e}_j) \underline{e}^j = (\underline{V} . \underline{e}^i) \underline{e}_i \\ \underline{e}_i &= g_{ij} \underline{e}^j \\ \underline{e}^j &= g^{ji} \underline{e}_i \\ g_{ik} . g^{kj} &= \delta_i^j\end{aligned}$$

Préambule (base orthonormée)

Dans le cas où $\{\underline{e}_i\}$ est une **base orthonormée** :

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = g_{ij} = \delta_{ij}$$

1. La base duale est confondue avec la base primale :

$$\underline{e}_i = \underline{e}^i$$

2. Le passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée est une **rotation**, il en découle :

$${}^t B = B^{-1}$$

On se place, dans tout ce qui suit, dans le cas de bases $\{\underline{e}_i\}$ orthonormées. La distinction entre indices covariants et contra-variants n'est plus nécessaire, par conséquent **les indices seront systématiquement placés en bas.**

$$\text{nota : } V'^j = (B^{-1})^j_i V^i \Rightarrow V'_j = {}^t B_{ij} V_i \Leftrightarrow V'_i = B_{ij} V_j$$

1. Calculer : $\delta_{ij}\delta_{jk}, \delta_{ii}$

TENSEURS EUCLIDIENS D'ORDRE UN

On part de la structure d'espace vectorielle de l'espace euclidien $E (\mathbb{R}^3)$.

1. Les **tenseurs euclidiens d'ordre 1** sont les **vecteurs** $\underline{V}$ de E .
2. A chaque vecteur $\underline{V}$ de E on peut associer la **forme linéaire** ϕ telle que :

$$\forall \underline{X} \in E, \phi(\underline{X}) = \underline{V} \cdot \underline{X} \in \mathbb{R}$$

Exemples de vecteurs :

- position $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t) = x_i \underline{e}_i$
- vitesse lagrangienne : $\underline{U}(\underline{X}, t)$
- gradient d'un champ scalaire $\tau(\underline{X})$:
 $d\tau = \underline{\nabla}\tau \cdot d\underline{X}$ et $\underline{\nabla}\tau = (\partial\tau/\partial X_i) \underline{e}_i$

Coordonnées cylindriques avec base orthonormée locale $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$d\underline{X} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z$$

$$\underline{\nabla}\tau = (\partial\tau/\partial r) \underline{e}_r + \frac{1}{r} (\partial\tau/\partial \theta) \underline{e}_\theta + (\partial\tau/\partial z) \underline{e}_z$$

PRODUIT TENSORIEL DE DEUX VECTEURS

On introduit la multiplication ou **produit tensoriel** de deux vecteurs (noté $\underline{U} \otimes \underline{V}$) en y associant la **forme bilinéaire** telle que :

$$\forall (\underline{X}, \underline{Y}) \in E \times E, (\underline{U} \otimes \underline{V})(\underline{X}, \underline{Y}) = (\underline{U} \cdot \underline{X})(\underline{V} \cdot \underline{Y}) \in \mathbb{R}$$

Il en découle :

- DISTRIBUTIVITE (addition)

$$[\underline{U} \otimes (\underline{V}_1 + \underline{V}_2)](\underline{X}, \underline{Y}) = [\underline{U} \otimes \underline{V}_1 + \underline{U} \otimes \underline{V}_2](\underline{X}, \underline{Y})$$

- DISTRIBUTIVITE (multiplication)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda [\underline{U} \otimes \underline{V}](\underline{X}, \underline{Y}) = [(\lambda \underline{U}) \otimes \underline{V}](\underline{X}, \underline{Y}) = [\underline{U} \otimes (\lambda \underline{V})](\underline{X}, \underline{Y})$$

- COMMUTATIVITE ?

$$(\forall (\underline{X}, \underline{Y}) \in E \times E, (\underline{U} \cdot \underline{X})(\underline{V} \cdot \underline{Y}) \neq (\underline{V} \cdot \underline{X})(\underline{U} \cdot \underline{Y})) \Rightarrow \underline{U} \otimes \underline{V} \neq \underline{V} \otimes \underline{U}$$

On peut alors construire à partir de la base $\{\underline{e}_i\}$ de E , un espace vectoriel $E \otimes E$ ayant pour base $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\}$. Cet espace est de dimension 9 (cas $E = \mathbb{R}^3$) et n'est pas isomorphe à $E \times E$.

TENSEURS EUCLIDIENS D'ORDRE DEUX

Un **tenseur euclidien d'ordre 2**, noté $\underline{\underline{T}}$, est défini comme :

1. Un **élément de l'espace tensoriel** $E \otimes E$:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

2. Une **forme bi-linéaire** sur $E \times E$ telle que :

$$\forall (\underline{X}, \underline{Y}) \in E \times E, \underline{\underline{T}}(\underline{X}, \underline{Y}) = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{X}, \underline{Y}) = T_{ij}(\underline{e}_i \cdot \underline{X})(\underline{e}_j \cdot \underline{Y})$$

3. Un élément **associé à une application linéaire** $\underline{\phi}$ de E dans E .

Soit l'application qui au vecteur $\underline{X}$ associe le vecteur $\underline{\phi}(\underline{X})$, on définit le tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ correspondant :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\phi}(\underline{e}_j) \otimes \underline{e}_j = (\phi_{ij}\underline{e}_i) \otimes \underline{e}_j = \phi_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

Les composantes du tenseur $\underline{\underline{T}}$ sont égales aux composantes de la matrice de l'application linéaire $\underline{\phi}$ dans la base $\{\underline{e}_i\}$: $T_{ij} = \phi_{ij}$.

2. Soit $\underline{e}$ un vecteur unitaire. Interpréter géométriquement le tenseur $\underline{e} \otimes \underline{e}$.

3. Etant donné une base orthonormée directe $\{\underline{e}_i\}$, à quelle conditions sur les $\underline{f}_i$ le tenseur $\underline{T} = \underline{f}_i \otimes \underline{e}_i$ représente-t-il une rotation ?

4. Déterminer le tenseur correspondant à une projection sur le plan perpendiculaire à $\underline{e}_3$ et celui correspondant à une symétrie par rapport à ce plan.

DEFINITIONS “USUELLES”

On peut introduire avec les tenseurs d'ordre 2 toutes les définitions couramment utilisées avec les applications linéaires (ou avec les matrices).

Tenseur identité ou métrique : $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$.

Tenseur inverse de $\underline{\underline{T}}$, notée $\underline{\underline{T}}^{-1}$, tel que : $T_{ik}T_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$.

Déterminant $\det(\underline{\underline{T}}) = \det(\varphi) = \det [T_{ij}]$

Trace $tr(\underline{\underline{T}}) = T_{ii} = \underline{\varphi}(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_i$

Transposition :

- produit vectoriel ${}^t(\underline{a} \otimes \underline{b}) = \underline{b} \otimes \underline{a}$
- tenseur ${}^t\underline{\underline{T}} = T_{ji}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

Tenseurs symétrique-antisymétrique : $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_a + \underline{\underline{T}}_s$
avec $\underline{\underline{T}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^t\underline{\underline{T}})$ et $\underline{\underline{T}}_a = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^t\underline{\underline{T}})$

PRODUIT CONTRACTÉ DE DEUX TENSEURS

Soit le produit contracté (notée “.”) :

1. de **deux vecteurs** (tenseurs d’ordre 1) :
c’est le produit scalaire $\underline{U}.\underline{V} \in \mathbb{R}$, il est commutatif.
2. d’un **vecteur** avec un **produit tensoriel de deux vecteurs** :
à gauche $\underline{a} . (\underline{b} \otimes \underline{c}) = (\underline{a} . \underline{b}) \underline{c} \in E$
à droite $(\underline{a} \otimes \underline{b}) . \underline{c} = \underline{a} . (\underline{b} . \underline{c}) \in E$
il n’est pas commutatif.
3. d’un **tenseur d’ordre 2** avec un **tenseur d’ordre 1** :
 - $\underline{\underline{T}} . \underline{X} = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) . \underline{X} = T_{ij}X_j \underline{e}_i = \underline{\varphi}(\underline{X})$
 - $\underline{Y} . \underline{\underline{T}} = \underline{Y} . (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) T_{ij} = T_{ij}Y_i \underline{e}_j = {}^t \underline{\underline{T}} . \underline{Y}$

remarque : le produit contracté à gauche et à droite est associatif

$$\underline{X} . (\underline{\underline{T}} . \underline{Y}) = (\underline{X} . \underline{\underline{T}}) . \underline{Y} = \underline{X} . \underline{\underline{T}} . \underline{Y} = X_i T_{ij} Y_j \in \mathbb{R}$$

d’où extraction des composantes de $\underline{\underline{T}}$: $T_{ij} = \underline{e}_i . \underline{\underline{T}} . \underline{e}_j$

PRODUIT CONTRACTE DE DEUX TENSEURS D'ORDRE DEUX

Le produit contracté $\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}'$ est le tenseur associé à l'application linéaire composée $\underline{\underline{\phi}} \circ \underline{\underline{\phi}}'$. Ainsi,

$$\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}' = T_{ik}T'_{kj}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \in E \otimes E$$

et on verifie également la relation :

$${}^t(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}') = {}^t\underline{\underline{T}}'.{}^t\underline{\underline{T}}$$

PRODUIT DOUBLEMENT CONTRACTE

C'est la trace du tenseur $\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}'$ que l'on note “:”

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}' = tr(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}') \in \mathbb{R}$$

5. Montrez les propriétés d'associativité du produit contracté :

$$- (\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{F}}).\underline{u} = \underline{\underline{T}}.(\underline{\underline{F}}.\underline{u})$$

$$- \underline{u}.(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{F}}).\underline{v} = (\underline{u}.\underline{\underline{T}}).(\underline{\underline{F}}.\underline{v})$$

$$- (\underline{\underline{F}}.\underline{u}) \otimes \underline{v} = \underline{\underline{F}}.(\underline{u} \otimes \underline{v})$$

GRADIENT D'UN CHAMP DE VECTEUR

Le champ de gradient du champ de vecteur $\underline{T}(\underline{X})$ est le champ de tenseur du deuxième ordre $\underline{\underline{\nabla T}}$ défini par :

$$\underline{dT} = \underline{\underline{\nabla T}} \cdot \underline{dX}$$

$$\underline{\underline{\nabla T}} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

DIVERGENCE D'UN CHAMP DE VECTEUR

La divergence du champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{X})$ est le champs scalaire obtenu en prenant la trace du gradient :

$$\text{div}(\underline{T}) = \text{tr}(\underline{\underline{\nabla T}}) = \frac{\partial T_i}{\partial X_i}$$

6. Déterminez les gradients suivants :

- $\underline{\underline{\nabla X}}$

- $\underline{\underline{\nabla(\alpha U)}}$, α étant une fonction scalaire et $\underline{U}(\underline{X})$
un vecteur

- $\underline{\underline{\nabla U}}$ en coordonnées cylindriques, avec $\underline{U} = u(r) \underline{e}_r$