École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Ile-de-France. Année 2008-2009

Cours

Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique
et Assimilation d'Observations

(Olivier Talagrand, avril-juin 2009)

Contrôle

3 Juillet 2009, de 10h00 à 12h30

Documents autorisés : notes de cours,
documents déposés sur le site du cours (sous forme imprimée)
Calculettes de poche autorisées

Les trois parties du contrôle sont indépendantes (cependant, les résultats de la question 1a peuvent être utiles pour la partie C).
Les trois parties contribueront chacune à un tiers de la note totale.

A. Corrélation temporelle des erreurs

On considère dans cette partie une situation qui a été mentionnée dans le cours, sans être réellement discutée, à savoir celle où les erreurs affectant les différentes données (observations, modèle) sont corrélées dans le temps.

On suppose que l'on observe une particule se déplaçant sur une droite, dont la position à l'instant k est notée x_k. La particule évolue entre les instants k=0 et k=1 suivant l'équation :

$$x_1 = x_0 + \eta_0 \tag{1}$$

où η_0 est une 'erreur de modélisation' aléatoire, de variance $E(\eta_0^2) = q$.

On suppose par ailleurs que l'on dispose de deux observations de la position de la particule aux instants 0 et 1, dénotées respectivement

$$y_0 = x_0 + \varepsilon_0 \tag{2a}$$

et

$$y_1 = x_1 + \varepsilon_1 \tag{2b}$$

où ε_0 et ε_1 sont des 'erreurs d'observation' aléatoires, de variance commune $E(\varepsilon_0^2) = E(\varepsilon_1^2) = r$, et supposées décorrélées de l'erreur de modélisation η_0.

1. On suppose dans un premier temps que les erreurs d'observation ε_0 et ε_1 sont mutuellement décorrélées, et l'on va utiliser les formules du filtre de Kalman pour estimer la position x_1 à partir des données (1) et (2).

1a. Quel est l'opérateur de modélisation (noté M_k dans le cours) associé à l'équation (1) ? Quel est l'opérateur d'observation (noté H_k dans le cours) associé aux observations (2) ?

Corrigé. L'équation (1) montre que l'opérateur de modélisation est l'identité (M_k=1), et les équations (2) montrent que l'opérateur d'observation est aussi l'identité (H_k=1).

1b. Le filtre de Kalman, tel qu'il a été décrit dans le cours, requiert à l'instant initial 0 une 'ébauche' et une matrice de covariance d'erreur associée (notées respectivement x^b_0 et P^b_0 dans le cours). L'ébauche est corrigée à l'aide des observations à l'instant 0 pour produire une 'analyse' (notée x^a_0), associée à une matrice de covariance d'erreur (notée P^a_0). Dans le cas présent, la seule information disponible à l'instant 0 est l'observation (2a), que l'on considérera donc comme l'analyse à cet instant ($x^a_0= y_0$).

Quelle est la variance d'erreur associée à y_0 (par cohérence avec les notations du cours, on notera p^a_0 cette variance).

Corrigé. La variance d'erreur associée à y_0 est $p^a_0= r$.

1c. Quelles sont l'ébauche x^b_1, et la variance d'erreur associée p^b_1, produites par le filtre de Kalman à l'instant 1 ?

Corrigé. Les formules du filtre de Kalman, appliquées au cas présent (M_0=1, Q_0=q), donnent $x^b_1= y_0$ et $p^b_1 = r+q$.

1d. Quelles sont l'analyse x^a_1, et la variance d'erreur associée p^a_1, produites par le filtre de Kalman à l'instant 1 ?

Corrigé. Dans le cas présent, R=r, H_1=1, et les formules du filtre de Kalman donnent :

$x^a_1 = y_0 + (r+q)\,(2r+q)^{-1}\,(y_1 - y_0) = [ry_0 + (r+q)\,y_1] / (2r+q)$

et

$p^a_1 = r+q - (r+q)^2 / (2r+q) = r(r+q) / (2r+q)$

Dans l'expression de x^a_1, un poids plus petit est attribué à la première observation y_0, dont le contenu informatif est diminué par l'erreur de modélisation.

2. On suppose maintenant que les erreurs d'observation ε_0 et ε_1 sont mutuellement corrélées, $E(\varepsilon_0\varepsilon_1) = cr$, $-1 \le c \le +1$.

2a. Montrer que le *Best Linear Unbiased Estimate* (*BLUE*) de x_1 à partir des données (1) et (2) est égal à :

$x'^a_1 = \{\, r(1-c)\, y_0 + [q + r(1-c)]\, y_1 \,\} / [q + 2r(1-c)]$

et que la variance d'erreur d'estimation correspondante est égale à :

$p'^a_1 = r\,[q + r(1\text{-}c^2)] / [q + 2r(1\text{-}c)]$

Plusieurs méthodes sont possibles pour obtenir ces résultats. On suggère d'admettre sans preuve qu'il est ici légitime de considérer l'estimation x^b_1 obtenue en 1c comme une ébauche de x_1, que l'on met à jour à l'aide de y_1 en utilisant la formule générale de l'Interpolation Optimale (et en prenant bien entendu en compte la corrélation entre les erreurs affectant x^b_1 et y_1).

Corrigé.. On applique la formule (1a) du formulaire du cours, l'inconnue x à déterminer étant ici x_1, et la donnée y étant y_1. Les moyennes $E(x)$ et $E(y)$ sont toutes deux égales à $x^b_1 = y_0$. La différence $x' = x - E(x)$ est égale à $x_1 - y_0 = (x_1 - x_0) - (y_0 - x_0) = \eta_0 - \varepsilon_0$. La différence $y' = y - E(y)$ est égale à $y_1 - y_0 = (y_1 - x_1) + (x_1 - y_0) = \eta_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0$. En conséquence, la covariance $E(x'y'^{\mathrm{T}}) = E[(\eta_0 - \varepsilon_0)\,(\eta_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0)]$ est égale à $q + r(1\text{-}c)$, et la variance $E(y'y'^{\mathrm{T}}) = E[(\eta_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,(\eta_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0)]$ est égale à $q + 2r(1\text{-}c)$. L'équation (1a) du formulaire donne alors :

$x'^a_1 = y_0 + [q + r(1\text{-}c)]\,(y_1 - y_0) / [q + 2r(1\text{-}c)] = \{\, r(1\text{-}c)\, y_0 + [q + r(1\text{-}c)]\, y_1 \,\} / [q + 2r(1\text{-}c)]$

Quant à la variance de l'erreur d'estimation correspondante, elle peut être calculée directement à partir de l'expression ci-dessus. On peut aussi utiliser la formule (1b) du formulaire du cours. Cette formule nécessite l'expression explicite de $E(x'x'^{\mathrm{T}}) = E[(\eta_0 - \varepsilon_0)\,(\eta_0 - \varepsilon_0)] = q + r$. On obtient ainsi :

$p'^a_1 = q + r - [q + r(1\text{-}c)]^2 / [q + 2r(1\text{-}c)] = r\,[q + r(1\text{-}c^2)] / [q + 2r(1\text{-}c)]$

2b. Comparer les poids affectés à y_0 et y_1 dans les estimations x^a_1 (question 1d) et x'^a_1 (on pourra considérer en particulier les cas extrêmes c = -1 et c = +1). Faites tous commentaires que vous trouverez appropriés.

Corrigé.. Dans l'un et l'autre cas, les poids affectés à y_0 et y_1 ont pour somme 1. Il suffit donc de considérer comment le poids affecté à y_0 est modifié entre les deux cas considérés, les modifications sur le poids affecté à y_1 s'en déduisant par différence. Le poids affecté à y_0 est égal à $r/(2r+q)$ en 1d, et à $r(1\text{-}c)\,/[q + 2r(1\text{-}c)]$ en 2a , Ces deux poids sont égaux à ½ quand $q = 0$, et inférieurs à ½ quand $q \neq 0$. Quand $q \neq 0$, le contenu informatif de l'observation y_0 a été dégradé par l'intégration entre les instants 0 et 1, et y_0 reçoit donc un poids inférieur à celui que reçoit y_1 (le poids affecté à y_0 tend d'ailleurs vers 0 quand q croît vers l'infini). Quand au contraire $q = 0$, le contenu informatif de y_0 reste constant au cours du temps, et les deux observations reçoivent le même poids.

En ce qui concerne l'influence de la corrélation c, le poids $r(1\text{-}c)\,/[q + 2r(1\text{-}c)]$ décroît de façon monotone de $2r/(q + 4r)$ à 0 quand c croît de -1 à +1. Quand la corrélation c est négative (et en particulier quand c=-1), les erreurs se compensent, au moins partiellement, dans l'addition des deux observations. Quand la corrélation est au contraire positive, les erreurs s'additionnent. Les deux observations sont redondantes, au point que, dans le cas limite c=1, l'observation y_0 ne contient aucune information qui ne soit pas déjà contenue dans y_1.

2c. Comparer les variances d'erreur d'estimation p^a_1 (question 1d) et p'^a_1 (ici aussi, on pourra considérer les cas extrêmes c = -1 et c = +1). Faites tous commentaires que vous trouverez appropriés.

Corrigé. $p^a_1 = r\,(r+q) / (2r+q)$ et $p'^a_1 = r\,[q + r(1\text{-}c^2)] / [q + 2r(1\text{-}c)]$. Ces deux variances d'erreur sont inférieures ou égales à r, ce qui traduit le fait que l'estimation à l'instant 1 est au moins aussi précise que l'observation y_1. Elles sont toutes deux fonctions croissantes de r et de q, ce qui traduit le fait évident que la qualité de l'estimation décroît quand la qualité des données décroît. Quant à l 'influence de la corrélation c, la variance p'^a_1 croît de façon monotone de rq / $(4r+q)$ à r quand c croît de -1 à +1. Comme déjà mentionné, une corrélation négative augmente le contenu informatif des observations, et diminue l'erreur d'estimation (qui devient nulle en particulier pour c=-1 et q=0). Une corrélation positive diminue le contenu informatif des observations, et augmente l'erreur d'estimation (qui devient en particulier égale à r pour c=1).

2d. Quel est le *BLUE* x'^a_0 de l'état initial x_0 à partir des données (1) et (2) (la réponse ne nécessite pas de calculs) ? Quelle est la variance de l'erreur d'estimation correspondante ?

Corrigé. Les données (1-2) sont exactement symétriques par rapport aux deux instants 1 et 2. Le *BLUE* x'^a_0 s'obtient donc en inversant les rôles de y_0 et y_1 dans l'expression de x'^a_1, soit :

$x'^a_0 = \{ r(1-c)\, y_1 + [q + r(1-c)]\, y_0 \} / [q + 2r(1-c)]$

Quant à la variance de l'erreur d'estimation correspondante, elle est égale à p'^a_1. soit :

$p'^a_0 = r\, [q + r(1-c^2)] / [q + 2r(1-c)]$

2e. Pouvez-vous définir une fonction scalaire $(\xi_0, \xi_1) \rightarrow \mathcal{J}(\xi_0, \xi_1)$ dont la minimisation produit les *BLUE* x'^a_0 et x'^a_1 ? (il suffira de donner l'expression explicite de cette fonction, il n'est pas nécessaire de la minimiser effectivement).

Corrigé. La question a été brièvement traitée dans le cours, où il a été mentionné que l'assimilation variationnelle permettait la prise en compte de corrélations temporelles entre les données. L'erreur de modélisation étant décorrélée des erreurs d'observation, la donnée (1) produira dans l'expression de la fonction recherchée un terme $(1/2q)\, (\xi_1 - \xi_0)^2$._Les observations (2) étant affectées d'erreurs mutuellement corrélées, elles produiront un terme $(1/2)\, (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\xi})^T \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\xi})$, où $\boldsymbol{y} \equiv (y_0, y_1)^T$ est le vecteur des observations, $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_0, \xi_1)^T$ est le vecteur des inconnues, et $\boldsymbol{R}$ est la matrice de covariance des erreurs d'observation ε_0 et ε_1, soit :

$$R \equiv r\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Cela donne, tous calculs effectués :

$$\mathcal{J}(\xi_0, \xi_1) \equiv (1/2q)\, (\xi_1 - \xi_0)^2 + (1/2r)\, [(y_0 - \xi_0)^2 - 2c(y_0 - \xi_0)\, (y_1 - \xi_1) + (y_1 - \xi_1)^2]$$

En plus de la méthode suggérée en 2a et de la minimisation de $\mathcal{J}(\xi_0, \xi_1)$, pouvez-vous proposer d'autres méthodes de détermination de x'^a_0 et x'^a_1 ?

Corrigé. Deux autres méthodes au moins sont possibles. L'une consiste à mettre les données (1-2) sous la forme (2) du formulaire général du cours, et à utiliser la formule (3a) du même formulaire. L'inconnue à déterminer est encore le couple $\boldsymbol{x} \equiv (x_0, x_1)^T$. L'opérateur d'observation généralisé correspondant aux données (1-2) est dans ces conditions :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de covariance d'erreurs correspondante étant égale à :

$$S = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & r & rc \\ 0 & rc & r \end{pmatrix}$$

L'autre méthode utilise aussi le couple $\boldsymbol{x} \equiv (x_0, x_1)^{\mathrm{T}}$ comme inconnue. Les observations (2) fournissent une première estimation $\boldsymbol{x}^b$ de $\boldsymbol{x}$ [égale en l'occurrence à $\boldsymbol{x}^b = (y_0, y_1)^{\mathrm{T}}$]. L'erreur affectant la donnée (1) étant décorrélée des erreurs affectant les observations, l'estimation $\boldsymbol{x}^b$ peut être mise à jour à l'aide de la donnée (1) suivant la formule standard du filtre de Kalman (formule 9a du formulaire du cours).

3. Les erreurs d'observation ε_0 et ε_1 étant toujours supposées corrélées comme en 2, on suppose que (par ignorance, inadvertance ou pour tout autre raison) on estime x_1 comme si ε_0 et ε_1 n'étaient pas corrélées. Quelle est la variance de l'erreur d'estimation correspondante ? Comment se compare-t-elle à la variance de l'erreur que l'on croit commettre (ici aussi, on pourra considérer les cas extrêmes c = -1 et c = +1) ? Comment interprétez-vous les résultats ?

Corrigé. On estime x_1 par

$x^a_1 = [ry_0 + (r+q)\, y_1] / (2r+q)$

L'erreur correspondante

$x^a_1 - x_1 = [r(y_0 - x_1) + (r+q)\,(y_1 - x_1)] / (2r+q) = [r\,(\varepsilon_0 - \eta_0) + (r+q)\,\varepsilon_1] / (2r+q)$

a pour variance

$p^e_1 = r(r+q)\,(2r+q + 2cr) / (2r+q)^2 = r(r+q) / (2r+q) + 2cr^2\,(r+q) / (2r+q)^2$

alors que l'on croit qu'elle a pour variance

$p^a_1 = r(r+q) / (2r+q)$

Cette dernière quantité correspond à une sur-estimation de l'erreur commise pour c<0, et à une sous-estimation pour c>0. On observe encore le fait qu'une corrélation c négative améliore la qualité de l'estimation, tandis qu'une corrélation positive la dégrade. La variance de l'erreur réellement commise croît avec c. Elle est égale à $qr(r+q) / (2r+q)^2$ pour c=-1, et à $r(r+q)\,(4r+q) / (2r+q)^2$ pour c=1.

4. Quelles conclusions tirez-vous quant à l'influence du signe de la corrélation c ? Et que pensez-vous de la possibilité d'une corrélation c négative ?

Corrigé. Comme on l'a vu, une corrélation négative améliore la qualité de l'estimation, alors qu'une corrélation négative dégrade la qualité de l'estimation. Dans la pratique de l'assimilation d'observations météorologiques, les erreurs d'ébauche ont une corrélation spatiale positive (et éventuellement négative, mais faible, à grande distance). Les erreurs d'observation satellitaires sont aussi corrélées positivement. La présence d'une corrélation négative permettant d'améliorer la qualité de l'estimation, si elle est d'intérêt théorique, semble assez peu plausible dans la situation actuelle.

B. Équation adjointe de l'équation de la chaleur

On considère l'équation dite de la 'chaleur'

$$\partial T/\partial t = K\, \partial^2 T/\partial x^2 \qquad (1)$$

On rappelle que cette équation régit l'évolution de la température $T(x, t)$, fonction du temps t et d'une coordonnée x décrivant un milieu spatial unidimensionnel $\mathcal{D}$ de conductivité thermique $K > 0$.

1. On suppose dans un premier temps que le domaine $\mathcal{D}$ est périodique. La spécification de $u(x) \equiv T(x, t_0)$, $x \in \mathcal{D}$, à un instant t_0 donné, définit une solution unique de (1) pour $t \geq t_0$.

1a. Quel est le comportement des solutions de (1) pour $t \rightarrow \infty$? (on énoncera simplement le résultat, sans chercher à en donner une preuve)

Corrigé. Toutes les solutions tendent vers une température uniforme sur $\mathcal{D}$, égale à la moyenne sur $\mathcal{D}$ de la température initiale.

Commentaires. Pour ce qui est d'une preuve, le moyen le plus simple est de prendre la transformée de Fourier de l'équation (1) par rapport à x. On trouve que la composante de Fourier d'ordre 0 reste constante dans le temps, tandis que les autres composantes tendent vers 0 (on peut d'ailleurs mentionner que c'est précisément pour résoudre l'équation (1) que Fourier a introduit la transformation qui porte son nom). Par ailleurs, sur le plan mathématique, l'équation (1), avec $K > 0$, ne définit un problème bien posé que pour les temps croissants. C'est la traduction mathématique du fait physique que la conduction de chaleur est un phénomène thermodynamiquement irréversible.

1b. On veut maintenant contrôler la condition initiale $u(x)$ de façon que la solution correspondante $T(x, t)$, considérée sur le domaine $\Delta \equiv \mathcal{D} \times [t_0, t_1]$, où $t_1 > t_0$, minimise une fonction scalaire que l'on mettra sous la forme générale

$$\mathcal{J} \equiv \int\int_\Delta F[T(x, t)]\, dxdt \qquad (2)$$

La fonction $F[T(x, t)]$ est une fonction scalaire de la température locale, que l'on ne définira pas plus précisément [elle peut être, comme dans l'exemple traité dans le cours, une mesure de l'écart entre $T(x, t)$ et une observation locale].

Soit $\delta u(x)$ une perturbation de la condition initiale $u(x)$, et $\delta T(x, t)$ la perturbation qui en résulte sur la solution de (1). Montrer que la perturbation correspondante $\delta\mathcal{J}$ de $\mathcal{J}$ est égale, au premier ordre par rapport à $\delta u(x)$, à :

$$\delta\mathcal{J} = \int\int_\Delta (dF/dT)\, \delta T\, dxdt - \int\int_\Delta \lambda(x, t)\, [\partial \delta T/\partial t - K\, \partial^2 \delta T/\partial x^2]\, dxdt$$

où $\lambda(x, t)$ est une fonction quelconque définie sur Δ.

Corrigé. La perturbation $\delta T(x, t)$ résultant de la perturbation $\delta u(x)$ est la solution de l'équation

$$\partial \delta T/\partial t \ = K\ \partial^2 \delta T/\partial x^2 \tag{1'}$$

telle que $\delta T(x,\ t_0) = \delta u(x)$. La perturbation $\delta\mathcal{J}$ qui en résulte sur $\mathcal{J}$ est elle-même égale, au premier ordre par rapport à $\delta T(x, t)$, à :

$$\delta\mathcal{J} \ = \int\int_{\Delta} (dF/dT)\ \delta T\ dxdt$$

Compte tenu de (1'), on voit que $\delta\mathcal{J}$ est aussi égale, quelle que soit la fonction scalaire $\lambda(x, t)$ définie sur Δ, à :

$$\delta\mathcal{J} \ = \int\int_{\Delta} (dF/dT)\ \delta T\ dxdt\ - \int\int_{\Delta} \lambda(x, t)\ [\partial \delta T/\partial t\ - K\ \partial^2\delta T/\partial x^2]\ dxdt$$

1c. En procédant comme dans l'exemple traité dans le cours (c'est-à-dire en effectuant des intégrations par parties sur les dérivées partielles de δT), montrer que la fonction $\lambda(x, t)$ peut être choisie de telle façon que l'expression ci-dessus se réduise à :

$$\delta\mathcal{J} \ = \int_{\mathcal{D}} \gamma(x)\ \delta u(x)\ dx$$

où l'intégrale ne porte que sur le domaine spatial $\mathcal{D}$, et où $\gamma(x)$ est une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Les conditions que doit vérifier la fonction $\lambda(x, t)$ sont au nombre de deux : une équation aux dérivées partielles définie sur le domaine spatio-temporel Δ, dite *équation adjointe* de (1), et une condition 'finale' à l'instant t_1. Spécifier explicitement l'une et l'autre. Expliciter aussi la fonction $\gamma(x)$ en termes de la solution adjointe $\lambda(x, t)$.

Corrigé.

$$\delta\mathcal{J} \ = \int\int_{\Delta} (dF/dT)\ \delta T\ dxdt\ - \int\int_{\Delta} \lambda(x, t)\ [\partial \delta T/\partial t\ - K\ \partial^2\delta T/\partial x^2]\ dxdt \tag{2'}$$

On considère le terme $\lambda\partial\delta T/\partial t$ dans la deuxième intégrale. Une intégration par parties par rapport à t le transforme en :

$$\lambda\partial\delta T/\partial t = \partial(\lambda\delta T)/\partial t - (\partial\lambda/\partial t)\ \delta T$$

ce qui devient, après intégration sur le domaine Δ :

$$\iint_{\Delta} \lambda\partial\delta T/\partial t\ dxdt\ = \int_{\mathcal{D}} \lambda\delta T dx\ \Big|_{t0}^{t1} - \iint_{\Delta} (\partial\lambda/\partial t)\ \delta T\ dxdt \tag{3'}$$

On considère de façon similaire le terme $\lambda\ \partial^2\delta T/\partial x^2$ dans la seconde intégrale de (2'). Deux intégrations par parties par rapport à x le transforment successivement en :

$$\lambda\ \partial^2\delta T/\partial x^2 = \partial[\lambda(\partial\delta T/\partial x)]\ /\partial x\ -\ (\partial\lambda/\partial x)\ (\partial\delta T/\partial x)$$

$$= \partial[\lambda(\partial\delta T/\partial x)]\ /\partial x\ - \partial[(\partial\lambda/\partial x)\ \delta T]\ /\partial x + \partial^2\lambda/\partial x^2\ \delta T \tag{4'}$$

Les deux premiers termes de cette dernière expression, qui sont des dérivées par rapport à x, s'annulent dans l'intégration sur le domaine périodique $\mathcal{D}$. L'intégration sur l'ensemble du domaine Δ conduit donc à :

$$\iint_\Delta \lambda\, \partial^2\delta T/\partial x^2\, dxdt \;=\; \iint_\Delta \partial^2\lambda/\partial x^2\, \delta T\; dxdt \qquad (5')$$

Portant les expressions (3') et (5') dans (2'), on obtient, après réarrangement des termes :

$$\delta\mathcal{J} \;=\; \int\int_\Delta [\partial\lambda/\partial t + K\partial^2\lambda/\partial x^2 + dF/dT]\; \delta T\; dxdt \;-\; \int_\mathcal{D} \lambda\; \delta T dx\; |_{t0}^{t1} \qquad \mathbf{(6')}$$

Cette expression est valide pour toute fonction $\lambda(x,\ t)$. On voit que si l'on choisit $\lambda(x,\ t)$ de façon à vérifier l'équation 'adjointe'

$$\partial\lambda/\partial t + K\partial^2\lambda/\partial x^2 + dF/dT = 0 \qquad (7'a)$$

sur le domaine spatio-temporel Δ, ainsi que la condition finale

$$\lambda(x,\ t_1) = 0, \qquad x \in \mathcal{D} \qquad (7'b)$$

l'expression (6') se réduit à :

$$\delta\mathcal{J} \;=\; \int_\mathcal{D} \lambda(x,\ t_{à})\; \delta u(x)\; dx \qquad (8')$$

Cette expression est de la forme recherchée, avec $\gamma(x) = \lambda(x,\ t_0)$.

1d. Expliquer précisément pourquoi il est légitime d'appeler la fonction $\gamma(x)$ le *gradient* de la fonction $\mathcal{J}$ par rapport au 'contrôle' $u(x)$, et en quoi la connaissance explicite de $\gamma(x)$ permet de contrôler $\mathcal{J}$ par l'intermédiaire de $u(x)$.

Corrigé. La fonction de x $\lambda(x,\ t_0)$ peut être considérée comme le gradient de la fonction $\mathcal{J}$ par rapport à la condition initiale $u(x)$ en ce sens que l'équation (8') définit la perturbation au premier ordre $\delta\mathcal{J}$ résultant de la perturbation $\delta u(x)$ comme le produit scalaire de $\delta u(x)$ par $\lambda(x,\ t_0)$. La connaissance de $\lambda(x,\ t_0)$ permet de contrôler $\mathcal{J}$ par l'intermédiaire de $u(x)$. Si l'on veut par exemple diminuer $\mathcal{J}$, on peut imposer une perturbation de la forme $\delta u(x) = -\ \alpha\ \lambda(x,\ t_{à})$, $\alpha > 0$.

Commentaires. On a mentionné plus haut que l'équation (1) ne définit un problème bien posé que pour les temps croissants. De façon similaire, l'équation adjointe (7'a), où les signes relatifs des dérivées temporelle et spatiale a changé (cela parce que la prise de l'adjoint de la dérivée temporelle, qui est du premier ordre, ne nécessite qu'une intégration par parties, tandis que la prise de l'adjoint de la dérivée spatiale, qui est du deuxième ordre, en nécessite deux), ne définit un problème bien posé que pour les temps décroissants. Cela est pleinement cohérent avec la spécification d'une condition finale, et non initiale, pour l'équation adjointe. On peut aussi remarquer que l'équation adjointe définit le gradient (d'une fonction) de la solution directe par rapport aux conditions initiales de cette solution. Du fait de la convergence de toutes les solutions directes vers un état uniforme, la sensibilité de l'état final par rapport à l'état initial doit décroître, et tendre vers 0, pour les temps croissants. La solution de l'équation adjointe doit donc tendre, elle aussi, vers 0 quand la durée d'intégration augmente. C'est fondamentalement ce que dit l'équation adjointe (7'a).

2. On suppose maintenant que le domaine spatial est l'intervalle fini $[x_0,\ x_1]$, le domaine spatio-temporel sur lequel on considère les solutions de l'équation (1) étant $\Delta \equiv [x_0,\ x_1] \times [t_0,\ t_1]$. La définition d'une solution de (1) sur Δ requiert maintenant la spécification de la

température, non seulement à l'instant initial [$T(x, t_0)$, $x_0 \leq x \leq x_1$], mais aussi le long des deux frontières latérales [$T(x_0, t)$ et $T(x_1, t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$]. On notera Γ la frontière ainsi définie, que l'on décrira par la coordonnée s, égale à x à l'instant initial t_0, et à t le long des deux frontières latérales. Le contrôle, dénoté $u(s)$, est maintenant la valeur de T le long de Γ, $u = T|_\Gamma$.

Gardant la même expression (2) pour la fonction à contrôler, refaire les calculs précédents en introduisant les modifications nécessaires pour la prise en compte des conditions aux limites latérales. Obtenir une expression de la forme

$$\delta\mathcal{J} = \int_\Gamma \beta(s)\ \delta u(s)\ ds$$

et donner l'expression explicite du gradient $\beta(s)$, en fonction de la solution adjointe $\lambda(x, t)$, sur chacun des trois segments de la frontière Γ.

L'équation adjointe est-elle différente de la précédente ?

Corrigé. Les calculs sont maintenant les mêmes jusqu'à l'équation (4'), que nous réécrivons :

$$\lambda\ \partial^2\delta T/\partial x^2 = \partial[\lambda(\partial\delta T/\partial x)]/\partial x - \partial[(\partial\lambda/\partial x)\ \delta T]/\partial x + \partial^2\lambda/\partial x^2\ \delta T \tag{4'}$$

L'intégrale sur Δ des dérivées par rapport à x n'est plus nulle, mais est constituée de deux termes frontières en x_0 et x_1. Plus précisément :

$$\iint_\Delta \lambda\ \partial^2\delta T/\partial x^2\ dxdt = \int_{[t0,\,t1]} \lambda(\partial\delta T/\partial x)\ dt\,\Big|_{x0}^{x1} - \int_{[t0,\,t1]} (\partial\lambda/\partial x)\ \delta T\ dt + \Big|_{x0}^{x1} + \iint_\Delta \partial^2\lambda/\partial x^2\ \delta T\ dxdt \tag{9'}$$

Cette expression remplace l'expression (5'). Portée avec (3') dans (2'), elle conduit à :

$$\delta\mathcal{J} = \int\!\!\int_\Delta [\partial\lambda/\partial t + K\partial^2\lambda/\partial x^2 + dF/dT]\ \delta T\ dxdt - \int_\mathcal{D} \lambda\ \delta T dx\,\Big|_{t0}^{t1} + K\int_{[t\emptyset,\,t1]} \lambda(\partial\delta T/\partial x)\ dt\,\Big|_{x0}^{x1}$$
$$- K\int_{[t0,\,t1]} (\partial\lambda/\partial x)\ \delta T\ dt + \Big|_{x0}^{x1} \tag{10'}$$

qui remplace (6'). Pour obtenir une expression de la forme requise, il est nécessaire, en plus des conditions (7'), d'éliminer l'avant-dernière intégrale dans (10'), dont l'intégrande est proportionnelle à la dérivée ($\partial\delta T/\partial x$), et non à δT. Cela est obtenu en imposant que la solution adjointe $\lambda(x, t)$ soit égale à 0 le long des deux frontières latérales :

$$\lambda(x_0, t) = 0\ , \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{11'a}$$
$$\lambda(x_1, t) = 0\ , \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{11'b}$$

Ces conditions conduisent avec (7') à :

$$\delta\mathcal{J} = \int_\mathcal{D} \lambda(x, t_0)\ \delta T(x, t_0)\ dx - K\int_{[t0,\,t1]} (\partial\lambda/\partial x)\ \delta T\ dt + \Big|_{x0}^{x1}$$

qui est de la forme requise, et montre que le gradient β de $\mathcal{J}$ par rapport à la condition initiale est égal, comme précédemment, à $\lambda(x, t_0)$, et que le gradient par rapport aux conditions aux limites latérales est égal à $K(\partial\lambda/\partial x)$ et $-K(\partial\lambda/\partial x)$ le long des deux frontières $x=x_0$ et $x=x_1$ respectivement.

L'équation adjointe (7') est la même que dans le cas précédent.

Commentaires. Le problème d'optimisation considéré est défini par trois éléments : la loi d'évolution du système considéré (équation 1), la fonction $\mathcal{J}$ à minimiser, (équation 2), et la variable de contrôle par rapport à laquelle est effectuée la minimisation. Une étude précise montre que la loi d'évolution définit la partie homogène de l'équation adjointe, la fonction $\mathcal{J}$ en définissant le terme inhomogène (dF/dT dans les notations ci-dessus). Quant à la variable de contrôle, elle définit les conditions aux limites à imposer à l'équation adjointe, ainsi que les composantes de la solution adjointe qui constituent le gradient recherché.

C. Comportement asymptotique du Filtre de Kalman

On considère un système dont l'état est défini à tout instant k par le scalaire x_k, évoluant dans le temps suivant la loi :

$$x_{k+1} = \alpha x_k + \eta_k \tag{1}$$

où α est un scalaire positif, et où l'erreur de modélisation η_k est de moyenne nulle, et de variance $E(\eta_k^2) = q$ (indépendante de k).

On dispose par ailleurs d'observations de l'état du système, de la forme

$$y_k = x_k + \varepsilon_k \tag{2}$$

où l'erreur d'observation ε_k est de moyenne nulle, et de variance $E(\varepsilon_k^2) = r$ (indépendante de k).

On suppose en outre que toutes les erreurs mutuellement décorrélées. On est donc dans des conditions où le filtre de Kalman standard peut être utilisé pour estimer de façon optimale l'état du système à partir des données (1) et (2).

1. Donner explicitement les équations du filtre de Kalman mis en œuvre sur les données (1) et (2). On notera x^b_k (resp. x^a_k) l'ébauche (resp. l'analyse) à l'instant k, et p^b_k (resp. p^a_k) la variance de l'erreur d'estimation correspondante.

Corrigé. L'opérateur de modélisation, noté M_k dans le cours, est ici le scalaire α, tandis que l'opérateur d'observation, noté H_k dans le cours, est ici le scalaire unité. Les matrices de covariance Q_k et R_k sont ici les scalaires q et r respectivement.

Les formules du filtre de Kalman sont donc :

- pour l'étape assimilation :

$$x^a_k = x^b_k + p^b_k\,(y_k - x^b_k) \,/\, (p^b_k + r) \tag{1'a}$$

$$p^a_k = p^b_k - (p^b_k)^2 \,/\, (p^b_k + r) = p^b_k\, r \,/\, (p^b_k + r) \tag{1'b}$$

- pour l'étape prévision :

$$x^b_{k+1} = \alpha\, x^a_k \tag{2'a}$$

$$p^b_{k+1} = \alpha^2\, p^a_k + q \qquad (2'b)$$

2. Établir une relation de récurrence pour la variance de l'erreur d'analyse p^a_k. Montrer que cette variance tend vers une valeur finie pour $k \to \infty$. Déterminer explicitement cette valeur limite. Interpréter le fait qu'il y ait une limite finie. Discuter les cas $q = 0$ et $q \to \infty$.

Corrigé. Les formules (2'a) et (2'b) ci-dessus conduisent à la relation de récurrence :

$$p^a_{k+1} = r(\alpha^2\, p^a_k + q) \,/\, (\alpha^2\, p^a_k + q + r) \qquad (3')$$

La fonction

$$x \to f(x) = r(\alpha^2 x + q) \,/\, (\alpha^2 x + q + r)$$

croît de façon monotone de $rq/(q+r)$ à r quand x croît de 0 à $+\infty$. Elle possède un point fixe, attractif. La variance d'erreur d'analyse p^a_k tend donc pour $k \to \infty$ vers ce point fixe, qui est égal à :

$$p^a_\infty = \{-[q + (1-\alpha^2)r] + \sqrt{[\,[q + (1-\alpha^2)r]^2 + 4rq]}\} \,/\, (2\alpha^2) \qquad (4')$$

La convergence de p^a_k vers ce point fixe exprime l'équilibre qui s'établit asymptotiquement entre les effets qui tendent à faire croître l'erreur d'estimation (à savoir, l'erreur de modélisation et, dans le cas où $\alpha>1$, la dynamique instable du système) et les effets qui tendent à la faire décroître (à savoir, l'introduction des observations et, dans le cas où $\alpha<1$, la dynamique stable du système).

Dans la limite $q = 0$, la variance asymptotique p^a_∞ est égale à $\{- (1-\alpha^2)r + |(1-\alpha^2)r|\} / (2\alpha^2)$, soit $p^a_\infty = 0$ si $\alpha \leq 1$, et $p^a_\infty = [1-(1/\alpha^2)]r$ si $\alpha>1$. Quand $\alpha \leq 1$, aucun effet ne tend à faire croître l'erreur d'estimation, qui, sous l'effet combiné de la dynamique (si $\alpha<1$) et de l'introduction des observations, tend asymptotiquement vers 0. Quand au contraire $\alpha>1$, la dynamique instable du système tend à faire croître l'erreur d'estimation, qui tend asymptotiquement vers une valeur finie.

Dans la limite $q \to \infty$, le contenu informatif des observations est perdu dans l'intégration du modèle, et on doit s'attendre à ce que l'erreur d'analyse soit égale à tout instant k à l'erreur d'observation. C'est ce que montrent les équations (1'b) et (2'b) : pour $q \to \infty$, $p^b_k \to \infty$ et $p^a_k \to r$. On peut aussi vérifier sur (4') que $p^a_\infty \to r$ quand $q \to \infty$.

Montrer que la variance p^b_k de l'erreur d'ébauche a aussi une limite finie, que l'on déterminera explicitement.

Corrigé. La formule (2'b) montre que p^b_k tend vers la limite :

$$p^b_\infty = \alpha^2 p^a_\infty + q = \{ q - (1-\alpha^2)r + \sqrt{[\,[q + (1-\alpha^2)r]^2 + 4rq]}\} \,/\, 2 \qquad (5')$$

3. On se limite maintenant au cas $\alpha=1$, et on suppose que l'erreur d'observation a une moyenne $E(\varepsilon_k) = b$ non nulle, mais que cette moyenne n'est pas prise en compte dans le filtre, qui est mis en œuvre sous la forme établie en 1. L'erreur modèle est toujours supposée de moyenne nulle.

3a. Établir une relation de récurrence pour l'erreur d'analyse x^a_k-x_k, puis pour la moyenne statistique $\delta x_k \equiv E(x^a_k-x_k)$ de cette erreur. Montrer que δx_k tend pour $k \rightarrow \infty$ vers une limite finie, que l'on déterminera.

Corrigé. Les formules (2) et (1'a) montrent que l'erreur d'analyse x^a_k-x_k est égale à:

$$x^a_k - x_k = x^b_k - x_k + p^b_k [\varepsilon_k - (x^b_k - x_k)] / (p^b_k + r)$$

Notant que, suivant les équations (1) et (2'a) :

$$x^b_k - x_k = x^a_{k-1} - x_{k-1} - \eta_{k-1} \qquad (6')$$

on obtient la relation de récurrence

$$x^a_k - x_k = r(x^a_{k-1} - x_{k-1}) / (p^b_k + r) - r\, \eta_{k-1} / (p^b_k + r) + p^b_k\, \varepsilon_k / (p^b_k + r) \qquad (7')$$

qui devient pour la moyenne $\delta x_k \equiv E(x^a_k-x_k)$, compte tenu de l'hypothèse $E(\varepsilon_k) = b$

$$\delta x_k = r\delta x_{k-1} / (p^b_k + r) + p^b_k\, b / (p^b_k + r) \qquad (8')$$

Cette suite a b pour point fixe. La variance p^b_k d'erreur d'ébauche (supposée) tend vers une limite finie si $q \neq 0$ (eq. 5' pour α=0), et le rapport $r/(p^b_k + r)$ tend vers une limite strictement inférieure à 1. Il en résulte que δx_k tend vers b.

3b. Déterminer le comportement asymptotique, pour $k \rightarrow \infty$, de l'erreur d'ébauche moyenne $E(x^b_k-x_k)$, et de l'innovation moyenne $E(y_k - x^b_k)$. Sachant que l'innovation est la seule source d'information objective sur les erreurs affectant les données, que pensez-vous de la possibilité d'identifier objectivement dans ce cas une erreur d'observation systématique ?

Corrigé. L'équation (6') montre que la moyenne $E(x^b_k-x_k)$ tend aussi vers b. Quant à l'innovation $y_k - x^b_k = \varepsilon_k - (x^b_k - x_k)$, sa moyenne tend vers 0.

Il apparaît donc que le filtre de Kalman est 'aveugle' à une erreur d'observation systématique, qu'il ne permet pas d'identifier.

Remarque. Ce dernier résultat n'a rien de général. Il suffirait de prendre $\alpha \neq 1$ pour qu'il ne soit plus vrai.

4. Traiter les mêmes questions pour le cas où c'est l'erreur de modélisation qui a une moyenne statistique $E(\eta_k) = g$ non nulle (l'erreur d'observation ayant, elle, une moyenne nulle).

Corrigé. L'équation (7') conduit maintenant à :

$$\delta x_k = r\delta x_{k-1} / (p^b_k + r) - rg / (p^b_k + r) \qquad (9')$$

La présence du coefficient $r/(p^b_k+r)$, dont la limite est strictement inférieure à 1, conduit à penser que cette suite converge. Elle n'a cependant pas un point fixe indépendant de k, et une démonstration stricte de la convergence est plus difficile que pour la suite (8'). On propose la preuve suivante (qui n'est peut-être pas la plus simple). Posant $\beta_k \equiv r/(p^b_k+r)$ et $\gamma_k \equiv - rg / (p^b_k + r)$, la suite (9') devient :

$$\delta x_k = \beta_k\, \delta x_{k-1} + \gamma_k \qquad (10')$$

où β_k et γ_k ont pour limites respectives, quand $k \to \infty$, $\beta = r/(p^b{}_\infty+r)$ et $\gamma = -\, rg/(p^b{}_\infty+r)$, $p^b{}_\infty$ étant défini par l'équation (5') (avec α=1). On définit la fonction :

$$u \;\to\; h(u) = \beta\, u + \gamma \qquad (11')$$

Elle possède un point fixe unique, attractif, $u_* \;=\; \gamma\,/(1\text{-}\;\beta)$.

Nous montrons maintenant que la suite $\{\delta X_k\}$ est bornée. Il résulte de (10') que :

$$|\,\delta X_k|\;\leq |\,\beta_k|\;|\,\delta X_{k\text{-}1}|\;+|\,\gamma_k\;|\;\leq B\,|\,\delta X_{k\text{-}1}|\;+C \qquad (12')$$

où est B un majorant des β_k, $|\,\beta_k| \leq B\; < 1$, et C un majorant des γ_k. cette équation montre que la condition $|\,\delta X_{k\text{-}1}|\; <\; L$ implique $|\,\delta X_k|\; <\; L$ dès lors que $L > C/(1\text{-}B)$, ce qui peut toujours être vérifié.

La suite $\{\delta X_k\}$ étant bornée, elle possède au moins un point d'accumulation, que nous noterons u_1. Soit $\{\delta X_l\}$ une sous-suite de $\{\delta X_k\}$ tendant vers u_1. Passant à la limite $l \to \infty$ dans l'égalité :

$$\delta X_{ll+1} = \beta_l\, \delta X_l + \gamma_l$$

on voit que $h(u_1) = \beta\, u_1 + \gamma$ est aussi un point d'accumulation pour la suite $\{\delta X_k\}$. Les itérés successifs de u_1 par h sont donc des points d'accumulation. Ces itérés tendent vers le point fixe u_* de f, qui est donc aussi un point d'accumulation. Retranchant l'égalité $u_* = h(u_*)$ de l'égalité (10'), on obtient :

$$\delta X_k\; \text{-}\; u_* = \beta_k\,(\delta X_{k\text{-}1}\;\text{-}\;u_*) + (\beta_k\;\text{-}\;\beta)\;u_* + \gamma_k\text{-}\;\;\gamma \qquad (13')$$

puis

$$|\,\delta X_k\;\text{-}\;u_*| = B\,|\,\delta X_{k\text{-}1}\;\text{-}\;u_*|\; + |\,\delta_k\,| \qquad (14')$$

où $\delta_k \equiv (\beta_k\;\text{-}\;\beta)\;u_* + \gamma_k\text{-}\gamma$, et où B est le même majorant que dans (12'). La quantité δ_k tend vers 0 quand $k \to \infty$. Pour tout $\zeta > 0$ donné, la condition $|\,\delta X_{k\text{-}1}\;\text{-}\;u_*|\; < \zeta$ implique $|\,\delta X_k\;\text{-}\;u_*|\; < \zeta$ dès lors que $|\,\delta_k\,| < (1\text{-}\;B)\;\zeta$. Pour $\zeta > 0$ donné, on choisit donc d'abord K tel que cette dernière inégalité soit vérifiée pour $k > K$. Puis $K' > K$ tel que $|\,\delta X_{K'\text{-}1}\;\text{-}\;u_*|\; < \zeta$, ce qui est toujours possible puisque u_* est un point d'accumulation de la suite $\{\delta X_k\}$. Il résulte de ce qui précède que l'inégalité $|\,\delta X_k\;\text{-}\;u_*|\; < \;\zeta$ sera vérifiée pour $k > K'$, ce qui montre que la suite $\{\delta X_k\}$ converge vers le point fixe de la fonction h (11'), soit

$$u_* = \gamma\,/(1\text{-}\;\beta) = \text{-}\;rg/p^b{}_\infty = \text{-}\;(2rg)\;/\;[\,q + \sqrt{(q^2 + 4rq)}\;]$$

L'équation (6') montre que la moyenne $E(x^b{}_k\text{-}x_k)$ de l'erreur d'ébauche tend vers $u_*\;\text{-}\;g$. La moyenne de l'ébauche tend quant à elle vers $g\;\text{-}\;u_*$.

5. Traiter les mêmes questions pour le cas où les deux erreurs ont simultanément une moyenne non nulle.

Corrigé. Dénotant respectivement par b et g, comme précédemment, les moyennes des erreurs d'observation et de modélisation, l'équation (7') conduit maintenant à :

$$\delta X_k \;=\; r\delta X_{k\text{-}1}/\;(p^b{}_k + r) - rg\;/\;(p^b{}_k + r) + p^b{}_k\, b\;/\;(p^b{}_k + r) \qquad (15')$$

La situation est similaire à celle de la question 4, le seul changement étant que le terme inhomogène dans (15') est maintenant la somme des termes inhomogènes dans (8') et (9'). La suite (15') a donc une limite, somme des limites des suites (8') et (9'), Soit :

$$u_{**} = b - \gamma/(1-\beta) = b - rg/p^b_\infty$$

où β et γ sont les mêmes quantités qu'en 4. La limite de l'erreur moyenne $E(x^b_k - x_k)$ de l'erreur d'ébauche est égale à $u_{**} - g = b -$ (r+1)g/p^b_∞. La moyenne de l'ébauche tend vers (r+1)g/p^b_∞. Cette limite est indépendante de l'erreur systématique b sur les observations. On retrouve le fait déjà relevé dans la question 3, à savoir que le filtre de Kalman appliqué à des données de forme (1-2) est aveugle à une erreur d'observation systématique. Si on constate que l'innovation a une moyenne non nulle, l'origine du 'biais' est à rechercher dans l'erreur de modélisation.

Remarque. Comme déjà dit en 3, ces résultats n'ont rien de général, et il suffirait de prendre $\alpha \neq 1$ pour qu'ils ne soient plus vrais.