École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Ile-de-France
Année 2008-2009

Cours
Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique
et Assimilation d'Observations
(Olivier Talagrand, avril-juin 2009)

Formulaire Récapitulatif

La notation $E(.)$ désigne une moyenne statistique. L'indice supérieur $^{\mathrm{T}}$ désigne la transposition. Pour toute quantité aléatoire u (scalaire ou vecteur), u' désigne la quantité aléatoire centré correspondante : $u' \equiv u - E(u)$

1. *Interpolation Optimale*. On cherche à évaluer un vecteur aléatoire $\underline{x}$ à partir de la valeur connue d'un vecteur aléatoire $\underline{y}$. La fonction affine $\underline{x}^a$ de $\underline{y}$ qui minimise la moyenne statistique $E[(\underline{x}^a - \underline{x})^{\mathrm{T}} (\underline{x}^a - \underline{x})]$ de l'erreur quadratique d'estimation est égale à :

$$\underline{x}^a = E(\underline{x}) + E(\underline{x}'\underline{y}'^{\mathrm{T}}) [E(\underline{y}'\underline{y}'^{\mathrm{T}})]^{-1} \underline{y}' \quad (1a)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation correspondante est égale à :

$$P^a \equiv E[(\underline{x}^a - \underline{x}) (\underline{x}^a - \underline{x})^{\mathrm{T}}] = E(\underline{x}'\underline{x}'^{\mathrm{T}}) - E(\underline{x}'\underline{y}'^{\mathrm{T}}) [E(\underline{y}'\underline{y}'^{\mathrm{T}})]^{-1} E(\underline{y}'\underline{x}'^{\mathrm{T}}) \quad (1b)$$

2. *Forme générale de l'Estimation Statistique Linéaire*. *Best Linear Unbiased Estimator* (*BLUE*).

On cherche à estimer un vecteur $\underline{x}$, appartenant à l'*espace des états*, de dimension n, à partir d'un *vecteur de données* $\underline{z}$ de dimension m ($m \geq n$, $m = n + p$). Le vecteur de données est de la forme :

$$\underline{z} = \Gamma \underline{x} + \underline{\zeta} \quad (2)$$

où Γ est un opérateur connu de l'espace des états dans l'espace des données, supposé de rang n, et où $\underline{\zeta}$ est une 'erreur' aléatoire centrée, de matrice de covariance connue S.

On cherche un estimé $\underline{x}^a$, fonction affine de $\underline{z}$, vérifiant les deux conditions suivantes :

a) $\underline{x}^a$ est invariant dans un changement d'origine dans l'espace des états.

b) $\underline{x}^a$ minimise la moyenne statistique $E[(\underline{x}^a - \underline{x})^{\mathrm{T}} (\underline{x}^a - \underline{x})]$ de l'erreur quadratique d'estimation correspondante.

L'estimé ainsi défini est égal à :

$$\underline{x}^a = (\Gamma^{\mathrm{T}} S^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^{\mathrm{T}} S^{-1} \underline{z} \qquad (3a),$$

la matrice de covariance de l'erreur d'estimation correspondante étant égale à :

$$P^a \equiv E[(\underline{x}^a - \underline{x})(\underline{x}^a - \underline{x})^{\mathrm{T}}] = (\Gamma^{\mathrm{T}} S^{-1} \Gamma)^{-1} \qquad (3b)$$

Forme variationnelle. L'estimé $\underline{x}^a$ peut aussi être obtenu par minimisation de la fonction scalaire suivante (*fonction objective*), définie sur l'espace des états :

$$\underline{\xi} \rightarrow \mathcal{J}(\underline{\xi}) = (1/2)\,(\Gamma\underline{\xi} - \underline{z})^{\mathrm{T}} S^{-1} (\Gamma\underline{\xi} - \underline{z}) \qquad (4)$$

L'estimé $\underline{x}^a$ est appelé en anglais le *Best Linear Unbiased Estimator* (*BLUE*) de $\underline{x}$ à partir de $\underline{z}$. Dans le cas particulier où l'erreur $\underline{\zeta}$ est gaussienne, la distribution de probabilité conditionnelle de $\underline{x}$ connaissant $\underline{z}$ est la distribution gaussienne de moyenne $\underline{x}^a$ et de matrice de covariance P^a.

Sous la condition $rang\,\Gamma = n$, le vecteur de données peut toujours être transformé en:

$$\underline{x}^b = \underline{x} + \underline{\zeta}^b \qquad (5a)$$
$$\underline{y} = H\underline{x} + \underline{\varepsilon} \qquad (5b)$$

avec : $E(\underline{\zeta}^b \underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}) = 0$ (6)

Dans les expressions ci-dessus, le vecteur $\underline{x}^b$, de dimension n, est l'*ébauche* du vecteur d'état à estimer, à laquelle s'ajoute le vecteur de données complémentaires $\underline{y}$, de dimension p.

Posant :

$$E(\underline{\zeta}^b \underline{\zeta}^{b\mathrm{T}}) = P^b \qquad (7a)$$
$$E(\underline{\varepsilon}\,\underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}) = R \qquad (7b),$$

les équations (3) s'écrivent sous les deux formes équivalentes :

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^a H^{\mathrm{T}} R^{-1} (\underline{y} - H\underline{x}^b) \qquad (8a)$$
$$(P^a)^{-1} = (P^b)^{-1} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} H \qquad (8b)$$

et :

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^b H^{\mathrm{T}} (H P^b H^{\mathrm{T}} + R)^{-1} (\underline{y} - H\underline{x}^b) \qquad (9a)$$
$$P^a = P^b - P^b H^{\mathrm{T}} (H P^b H^{\mathrm{T}} + R)^{-1} H P^b \qquad (9b)$$

Dans les équations (8a) et (9a), l'estimé $\underline{x}^a$ est décomposé en la somme de l'ébauche $\underline{x}^b$ et d'une correction proportionnelle au *vecteur innovation* $\underline{y} - H\underline{x}^b$.

Dans la décomposition (5), la fonction objective (4) devient :

$$\underline{\xi} \rightarrow \mathcal{J}(\underline{\xi}) = (1/2)\,(\underline{\xi} - \underline{x}^b)^{\mathrm{T}} (P^b)^{-1} (\underline{\xi} - \underline{x}^b) + (1/2)\,(H\underline{\xi} - \underline{y})^{\mathrm{T}} R^{-1} (H\underline{\xi} - \underline{y}) \qquad (10)$$

3. *Système évolutif dans le temps. Filtre de Kalman.*

On suppose maintenant que le système observé évolue au cours du temps, suivant la loi :

$$\underline{x}_{k+1} = M_k \underline{x}_k + \underline{\eta}_k \qquad (11)$$

où $\underline{x}_k$ est l'état du système à l'instant k ($\dim \underline{x}_k = n$), M_k est une matrice connue, et $\underline{\eta}_k$ est l'*erreur modèle*, aléatoire, décorrélée dans le temps de covariance connue Q_k à l'instant k.

On dispose aux instants $k = 0, 1, 2, \ldots$ d'observations de la forme

$$\underline{y}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{\varepsilon}_k \qquad (12)$$

où H_k est une matrice connue, et $\underline{\varepsilon}_k$ une erreur d'observation aléatoire, décorrélée dans le temps de covariance connue R_k à l'instant k. On dispose en outre d'une ébauche à l'instant k = 0, de la forme

$$\underline{x}_0{}^b = \underline{x}_0 + \underline{\zeta}_0{}^b \qquad (13)$$

où l'erreur $\underline{\zeta}_0{}^b$ est de covariance $P_0{}^b$. On suppose enfin que les erreurs $\underline{\eta}_k$, $\underline{\varepsilon}_k$, et $\underline{\zeta}_0{}^b$ sont mutuellement décorrélées.

Le *filtre de Kalman* est défini par l'algorithme récursif suivant, initialisé à partir de ($\underline{x}_0{}^b$, $P_0{}^b$) :

Analyse à l'instant k :

$$\underline{x}_k{}^a = \underline{x}_k{}^b + P_k{}^b H_k{}^{\mathrm{T}} (H_k P_k{}^b H_k{}^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} (\underline{y}_k - H_k \underline{x}_k{}^b) \qquad (14a)$$

$$P_k{}^a = P_k{}^b - P_k{}^b H_k{}^{\mathrm{T}} (H_k P_k{}^b H_k{}^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} H_k{}^{\mathrm{T}} P_k{}^b \qquad (14b)$$

Évolution temporelle entre les instants k et k+1 :

$$\underline{x}_{k+1}{}^b = M_k \underline{x}_k{}^a \qquad (15a)$$

$$P_{k+1}{}^b = M_k P_k{}^a M_k{}^{\mathrm{T}} + Q_k \qquad (15b)$$

L'estimé $\underline{x}_k{}^b$ (resp. $\underline{x}_k{}^a$) ainsi obtenu est le *BLUE* de l'état $\underline{x}_k$ à l'instant k à partir de toutes les observations jusqu'à l'instant k-1 (resp. jusqu'à l'instant k). La matrice $P_k{}^b$ (resp. $P_k{}^a$) est la matrice de covariance d'erreur correspondante.

Forme variationnelle. Nous limitant maintenant à la suite des K+1 instants $k = 0, 1, \ldots, K$, la minimisation de la fonction objective :

$$(\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_K) \rightarrow$$
$$\mathcal{J}(\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_K) = (1/2)\ (\underline{\xi}_0 - \underline{x}_0^b)^T [P_0^b]^{-1} (\underline{\xi}_0 - \underline{x}_0^b) + (1/2) \Sigma_{k=0,K} (H_k\underline{\xi}_k - \underline{y}_k)^T R_k^{-1} (H_k\underline{\xi}_k - \underline{y}_k)$$
$$+ (1/2) \Sigma_{k=0,\ldots,K-1} (\underline{\xi}_{k+1} - M_k \underline{\xi}_k)^T Q_k^{-1} (\underline{\xi}_{k+1} - M_k \underline{\xi}_k) \qquad (16)$$

où les $\underline{\xi}_k$ (k=0, …, K) appartiennent à l'espace des états du système, définit la suite des *BLUE* des $\underline{x}_k$ à partir de toutes les données (11-13). En particulier, l'état ainsi obtenu à l'instant final K est identique à l'estimé $\underline{x}_N^a$ produit par le filtre de Kalman (14-15).