École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Île-de-France

Année Universitaire 2012-2013

Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique et Assimilation de Données

Olivier Talagrand

Cours 2

22 Mars 2013

Lois physiques régissant l'écoulement

- Conservation de la masse

  $D\rho/Dt + \rho\,\mathrm{div}\underline{U} = 0$

- Conservation de l'énergie

  $De/Dt - (p/\rho^2)\, D\rho/Dt = Q$

- Conservation de la quantité de mouvement

  $D\underline{U}/Dt + (1/\rho)\,\underline{\mathrm{grad}p} - \underline{g} + 2\,\underline{\Omega} \wedge \underline{U} = \underline{F}$

- Equation d'état

  $f(p, \rho, e) = 0$ $(p/\rho = rT,\ e = C_v T)$

- Conservation de la masse de composants secondaires (eau pour l'atmosphère, sel pour l'océan, …)

  $Dq/Dt + q\,\mathrm{div}\underline{U} = S$

Lois équations dites *primitives*, utilisées pour la modélisation numérique à grande échelle (prévision météorologique et modélisation climatique), sont fondées sur les hypothèses suivantes :

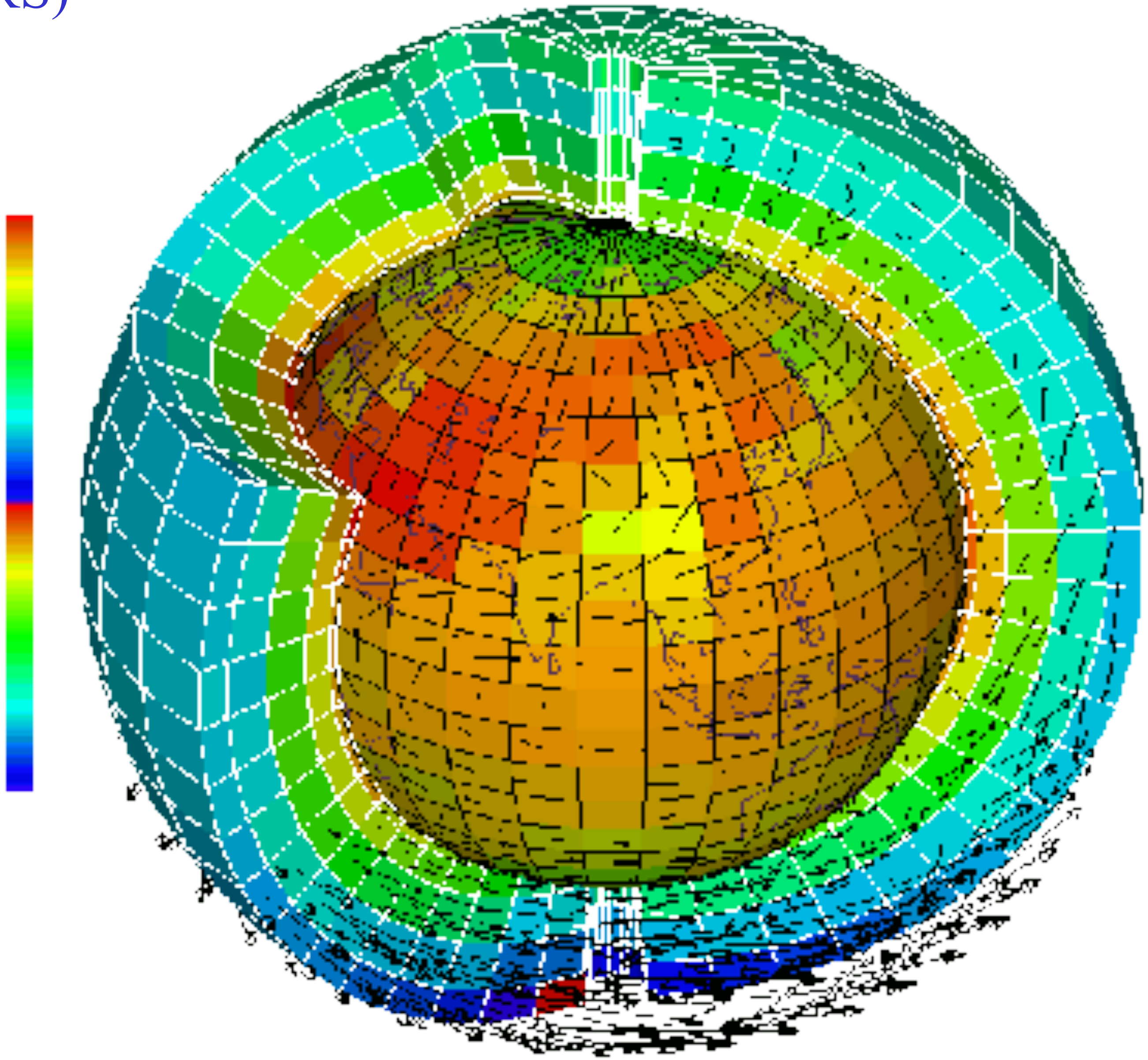
- *Le fluide est en équilibre hydrostatique*

- *Le fluide est contenu dans une surface sphérique d'épaisseur nulle*. Cela n'empêche pas qu'il existe à l'intérieur du fluide une coordonnée verticale qui, du fait de l'hypothèse hydrostatique, peut être choisie comme étant la pression p.

- *La composante horizontale de la force de Coriolis résultant du mouvement vertical est négligeable* (cette hypothèse, imposée en fait par la précédente, est dite *approximation traditionnelle*).

- *La force des marées est négligeable*

A schematic of an Atmospheric General Circulation Model (L. Fairhead /LMD-CNRS)



Modèles (semi-)spectraux

$$T(\mu\text{=sin(latitude)}, \lambda\text{=longitude}) = \sum_{\substack{0\le n<\infty \\ -n\le m\le n}} T_n^m Y_n^m(\mu,\lambda)$$

où les $Y_n^m(\mu,\lambda)$ sont les *harmoniques sphériques*

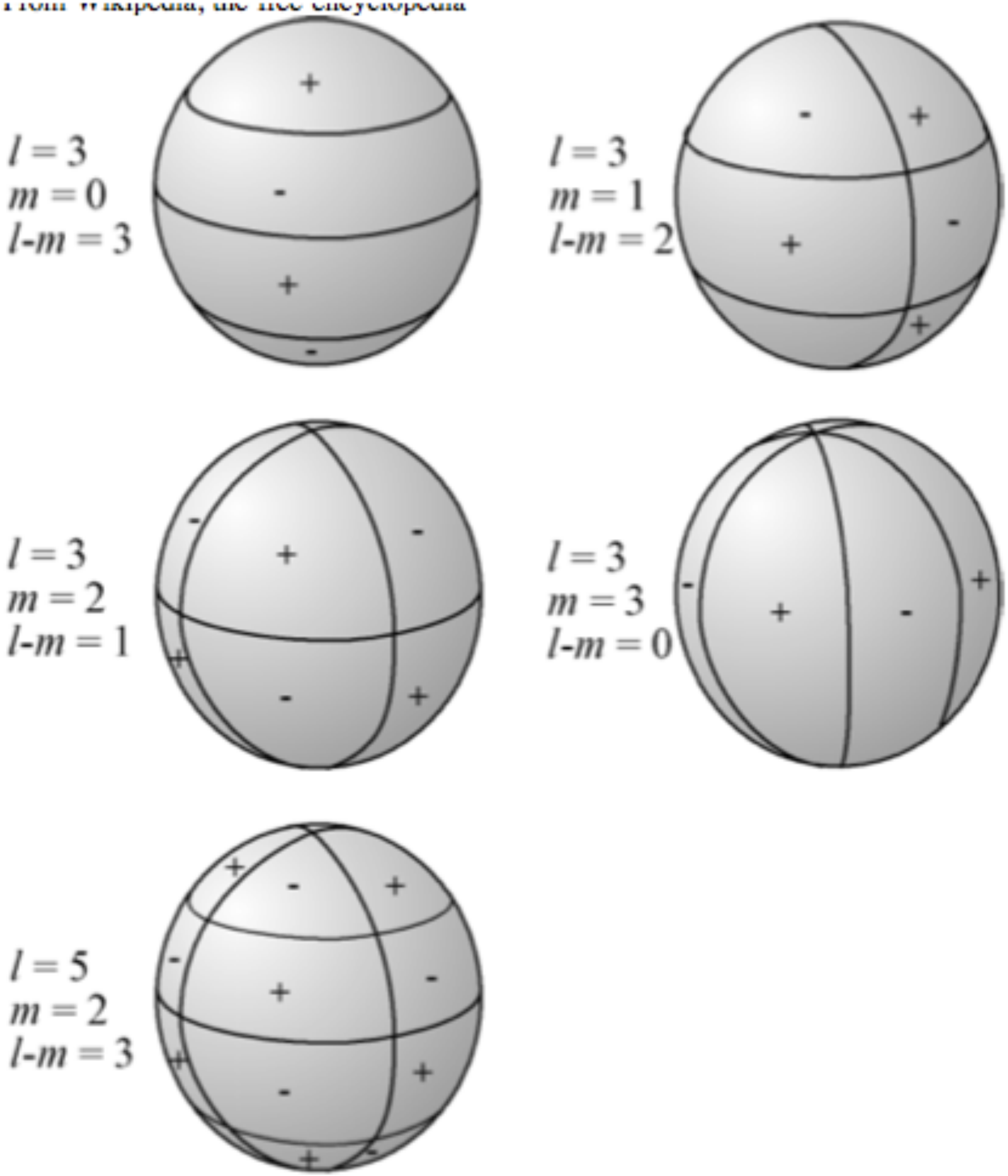
$$Y_n^m(\mu,\lambda) \propto P_n^m(\mu)\exp(im\lambda)$$

$P_n^m(\mu)$ est la *fonction de Legendre* de deuxième espèce.

$$P_n^m(\mu) \propto (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n$$

n et m sont respectivement le *degré* et l'*ordre* de l'harmonique $Y_n^m(\mu,\lambda)$

From Wikipedia, the free encyclopedia



Modèles (semi-)spectraux

Les harmoniques sphériques définissent une base complète orthonormée de l'espace L^2 à la surface S de la sphère.

$$\int_S Y_n^m Y_{n'}^{m'} d\mu d\lambda = \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}$$

Relation de Parseval

$$\int_S T^2(\mu,\lambda) d\mu d\lambda = \sum_{\substack{0 \le n < \infty \\ -n \le m \le n}} \left| T_n^m \right|^2$$

Les harmoniques sphériques sont fonctions propres du laplacien à la surface de la sphère

$$\Delta Y_n^m = -n(n+1) Y_n^m$$

Troncature ‘triangulaire’ *TN* ($n \leq N$, $-n \leq m \leq n$) indépendante du choix d’un axe polaire. Représentation est parfaitement homogène à la surface de la sphère

Calculs non linéaires effectués dans l’espace physique (sur grille latitude-longitude ‘gaussienne’). Les transformations requises sont possibles à un coût non prohibitif grâce à l’utilisation de Transformées de Fourier Rapides (*Fast Fourier Transforms*, *FFT*, en anglais). Il existe aussi une version rapide des Transformées de Legendre.