

Cours  
*Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique  
et Assimilation d'Observations*  
(Olivier Talagrand, avril-juin 2014)

**Formulaire Récapitulatif**

La notation  $E(\cdot)$  désigne une moyenne statistique. L'indice supérieur  $^T$  désigne la transposition. Pour toute quantité aléatoire  $u$  (scalaire ou vecteur),  $u'$  désigne la quantité aléatoire centrée correspondante :  $u' \equiv u - E(u)$

1. *Interpolation Optimale*. On cherche à évaluer un vecteur aléatoire  $\underline{x}$  à partir de la valeur connue d'un vecteur aléatoire  $\underline{y}$ . La fonction affine  $\underline{x}^a$  de  $\underline{y}$  qui minimise la moyenne statistique  $E[(\underline{x}^a - \underline{x})^T (\underline{x}^a - \underline{x})]$  de l'erreur quadratique d'estimation est égale à :

$$\underline{x}^a = E(\underline{x}) + E(\underline{x}'\underline{y}'^T) [E(\underline{y}'\underline{y}'^T)]^{-1} \underline{y}' \quad (1a)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation correspondante est égale à :

$$P^a \equiv E[(\underline{x}^a - \underline{x}) (\underline{x}^a - \underline{x})^T] = E(\underline{x}'\underline{x}'^T) - E(\underline{x}'\underline{y}'^T) [E(\underline{y}'\underline{y}'^T)]^{-1} E(\underline{y}'\underline{x}'^T) \quad (1b)$$

2. *Forme générale de l'Estimation Statistique Linéaire. Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)*.

On cherche à estimer un vecteur  $\underline{x}$ , appartenant à l'espace des états, de dimension  $n$ , à partir d'un vecteur de données  $\underline{z}$  de dimension  $m$  ( $m \geq n$ ,  $m = n + p$ ). Le vecteur de données est de la forme :

$$\underline{z} = \Gamma \underline{x} + \underline{\zeta} \quad (2)$$

où  $\Gamma$  est un opérateur connu de l'espace des états dans l'espace des données, supposé de rang  $n$ , et où  $\underline{\zeta}$  est une 'erreur' aléatoire centrée, de matrice de covariance connue  $S$ .

On cherche un estimé  $\underline{x}^a$ , fonction affine de  $\underline{z}$ , vérifiant les deux conditions suivantes :

a)  $\underline{x}^a$  est invariant dans un changement d'origine dans l'espace des états.

b)  $\underline{x}^a$  minimise la moyenne statistique  $E[(\underline{x}^a - \underline{x})^T (\underline{x}^a - \underline{x})]$  de l'erreur quadratique d'estimation correspondante.

L'estimé ainsi défini est égal à :

$$\underline{x}^a = (\Gamma^T S^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T S^{-1} \underline{z} \quad (3a),$$

la matrice de covariance de l'erreur d'estimation correspondante étant égale à :

$$P^a \equiv E[(\underline{x}^a - \underline{x})(\underline{x}^a - \underline{x})^T] = (\Gamma^T S^{-1} \Gamma)^{-1} \quad (3b)$$

*Forme variationnelle.* L'estimé  $\underline{x}^a$  peut aussi être obtenu par minimisation de la fonction scalaire suivante (*fonction objective*), définie sur l'espace des états :

$$\underline{\xi} \rightarrow J(\underline{\xi}) = (1/2) (\Gamma \underline{\xi} - \underline{z})^T S^{-1} (\Gamma \underline{\xi} - \underline{z}) \quad (4)$$

L'estimé  $\underline{x}^a$  est appelé en anglais le *Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)* de  $\underline{x}$  à partir de  $\underline{z}$ . Dans le cas particulier où l'erreur  $\underline{\xi}$  est gaussienne, la distribution de probabilité conditionnelle de  $\underline{x}$  connaissant  $\underline{z}$  est la distribution gaussienne de moyenne  $\underline{x}^a$  et de matrice de covariance  $P^a$ .

Sous la condition  $\text{rang} \Gamma = n$ , le vecteur de données peut toujours être transformé en :

$$\underline{x}^b = \underline{x} + \underline{\zeta}^b \quad (5a)$$

$$\underline{y} = H \underline{x} + \underline{\varepsilon} \quad (5b)$$

$$\text{avec : } E(\underline{\zeta}^b \underline{\varepsilon}^T) = 0 \quad (6)$$

Dans les expressions ci-dessus, le vecteur  $\underline{x}^b$ , de dimension  $n$ , est l'*ébauche* du vecteur d'état à estimer, à laquelle s'ajoute le vecteur de données complémentaires  $\underline{y}$ , de dimension  $p$ .

Posant :

$$E(\underline{\zeta}^b \underline{\zeta}^{bT}) = P^b \quad (7a)$$

$$E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T) = R \quad (7b),$$

les équations (3) s'écrivent sous les deux formes équivalentes :

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^a H^T R^{-1} (\underline{y} - H \underline{x}^b) \quad (8a)$$

$$(P^a)^{-1} = (P^b)^{-1} + H^T R^{-1} H \quad (8b)$$

et :

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^b H^T (H P^b H^T + R)^{-1} (\underline{y} - H \underline{x}^b) \quad (9a)$$

$$P^a = P^b - P^b H^T (H P^b H^T + R)^{-1} H P^b \quad (9b)$$

Dans les équations (8a) et (9a), l'estimé  $\underline{x}^a$  est décomposé en la somme de l'ébauche  $\underline{x}^b$  et d'une correction proportionnelle au *vecteur innovation*  $\underline{y} - H\underline{x}^b$ .

Dans la décomposition (5), la fonction objective (4) devient :

$$\underline{\xi} \rightarrow J(\underline{\xi}) = (1/2) (\underline{\xi} - \underline{x}^b)^T (P^b)^{-1} (\underline{\xi} - \underline{x}^b) + (1/2) (H\underline{\xi} - \underline{y})^T R^{-1} (H\underline{\xi} - \underline{y}) \quad (10)$$

### 3. Système évolutif dans le temps. Filtre de Kalman.

On suppose maintenant que le système observé évolue au cours du temps, suivant la loi :

$$\underline{x}_{k+1} = M_k \underline{x}_k + \underline{\eta}_k \quad (11)$$

où  $\underline{x}_k$  est l'état du système à l'instant  $k$  ( $\dim \underline{x}_k = n$ ),  $M_k$  est une matrice connue, et  $\underline{\eta}_k$  est l'*erreur modèle*, aléatoire, décorrélée dans le temps de covariance connue  $Q_k$  à l'instant  $k$ .

On dispose aux instants  $k = 0, 1, 2, \dots$  d'observations de la forme

$$\underline{y}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{\varepsilon}_k \quad (12)$$

où  $H_k$  est une matrice connue, et  $\underline{\varepsilon}_k$  une erreur d'observation aléatoire, décorrélée dans le temps, de covariance connue  $R_k$  à l'instant  $k$ . On dispose en outre d'une ébauche à l'instant  $k = 0$ , de la forme

$$\underline{x}_0^b = \underline{x}_0 + \underline{\zeta}_0^b \quad (13)$$

où l'erreur  $\underline{\zeta}_0^b$  est de covariance  $P_0^b$ . On suppose enfin que les erreurs  $\underline{\eta}_k$ ,  $\underline{\varepsilon}_k$ , et  $\underline{\zeta}_0^b$  sont mutuellement décorrélées.

Le *filtre de Kalman* est défini par l'algorithme récursif suivant, initialisé à partir de  $(\underline{x}_0^b, P_0^b)$  :

Analyse à l'instant  $k$  :

$$\underline{x}_k^a = \underline{x}_k^b + P_k^b H_k^T (H_k P_k^b H_k^T + R_k)^{-1} (\underline{y}_k - H_k \underline{x}_k^b) \quad (14a)$$

$$P_k^a = P_k^b - P_k^b H_k^T (H_k P_k^b H_k^T + R_k)^{-1} H_k^T P_k^b \quad (14b)$$

Évolution temporelle entre les instants  $k$  et  $k+1$  :

$$\underline{x}_{k+1}^b = M_k \underline{x}_k^a \quad (15a)$$

$$P_{k+1}^b = M_k P_k^a M_k^T + Q_k \quad (15b)$$

L'estimé  $\underline{x}_k^b$  (resp.  $\underline{x}_k^a$ ) ainsi obtenu est le *BLUE* de l'état  $\underline{x}_k$  à l'instant  $k$  à partir de toutes les observations jusqu'à l'instant  $k-1$  (resp. jusqu'à l'instant  $k$ ). La matrice  $P_k^b$  (resp.  $P_k^a$ ) est la matrice de covariance d'erreur correspondante.

*Forme variationnelle.* Nous limitant maintenant à la suite des  $K+1$  instants  $k = 0, 1, \dots, K$ , la minimisation de la fonction objective :

$$\begin{aligned}
 & (\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_K) \rightarrow \\
 & \mathcal{J}(\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_K) = (1/2) (\underline{\xi}_0 - \underline{x}_0^b)^T [P_0^b]^{-1} (\underline{\xi}_0 - \underline{x}_0^b) + (1/2) \sum_{k=0, \dots, K} (H_k \underline{\xi}_k - \underline{y}_k)^T R_k^{-1} (H_k \underline{\xi}_k - \underline{y}_k) \\
 & + (1/2) \sum_{k=0, \dots, K-1} (\underline{\xi}_{k+1} - M_k \underline{\xi}_k)^T Q_k^{-1} (\underline{\xi}_{k+1} - M_k \underline{\xi}_k) \quad (16)
 \end{aligned}$$

où les  $\underline{\xi}_k$  ( $k=0, \dots, K$ ) appartiennent à l'espace des états du système, définit la suite des *BLUE* des  $\underline{x}_k$  à partir de toutes les données (11-13). En particulier, l'état ainsi obtenu à l'instant final  $K$  est identique à l'estimé  $\underline{x}_N^a$  produit par le filtre de Kalman (14-15).