

École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Île-de-France

Année Universitaire 2014-2015

Modélisation Numérique  
de l'Écoulement Atmosphérique  
et Assimilation de Données

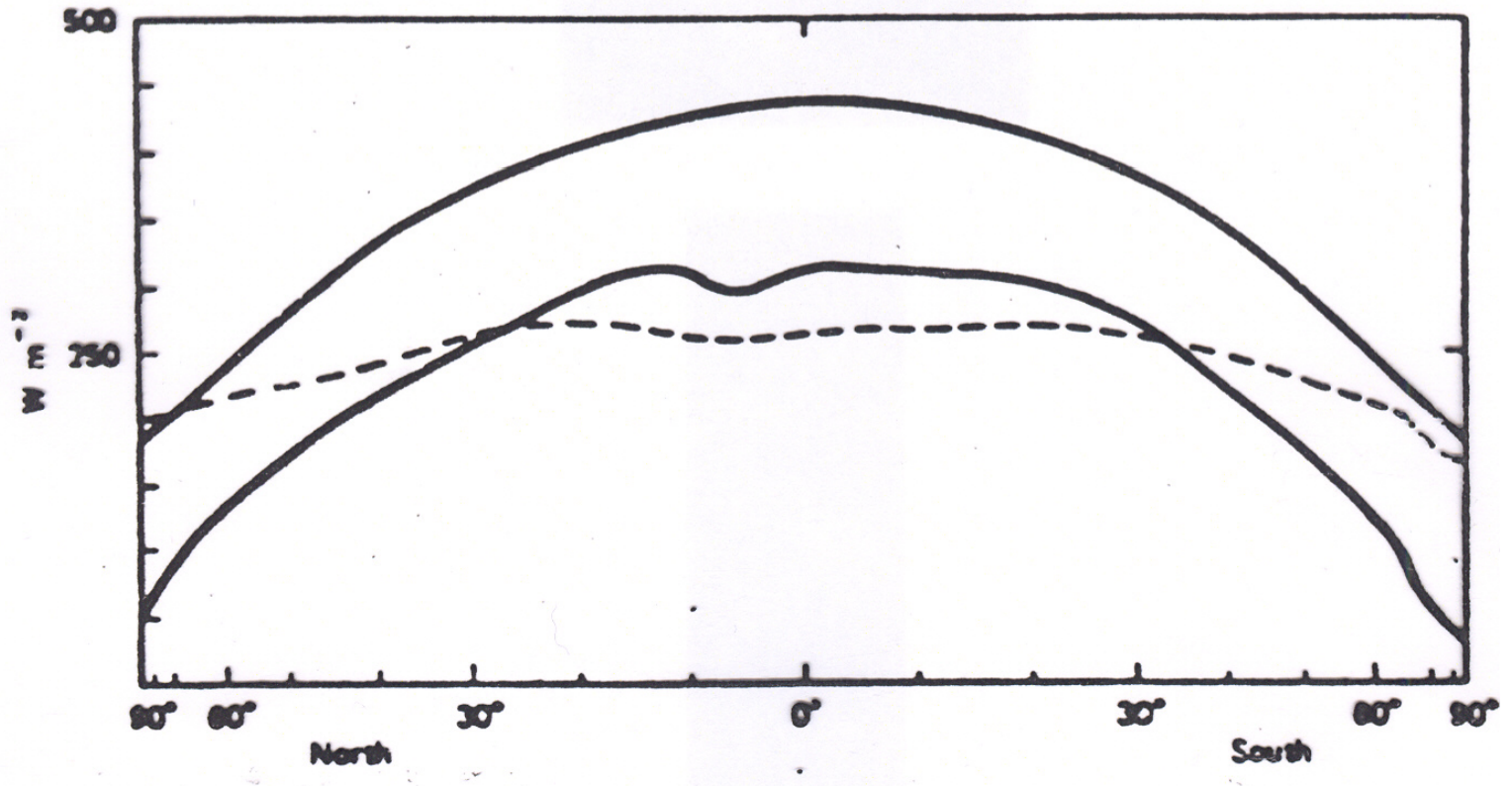
Olivier Talagrand

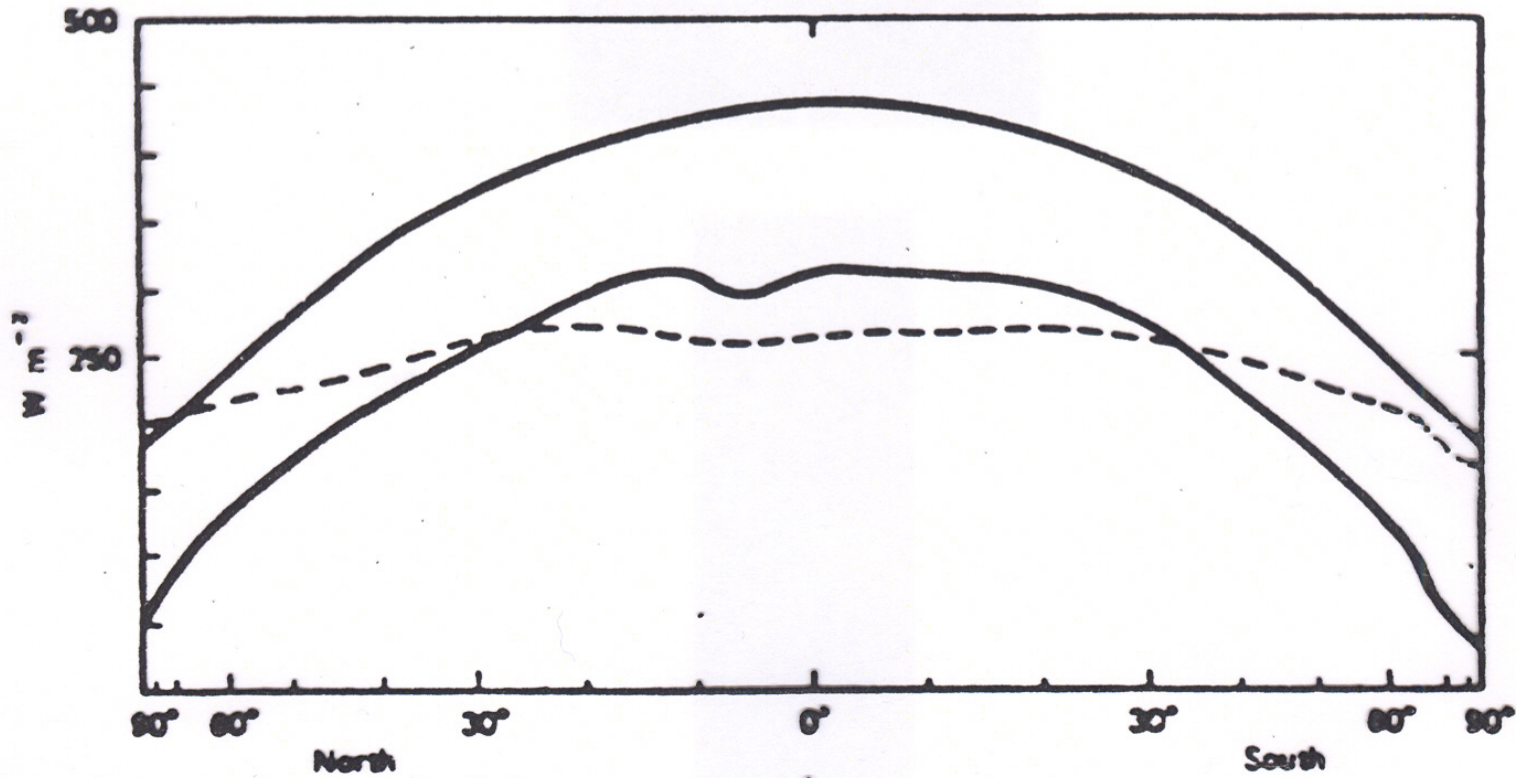
Cours 1

30 Mars 2015

## Programme du cours

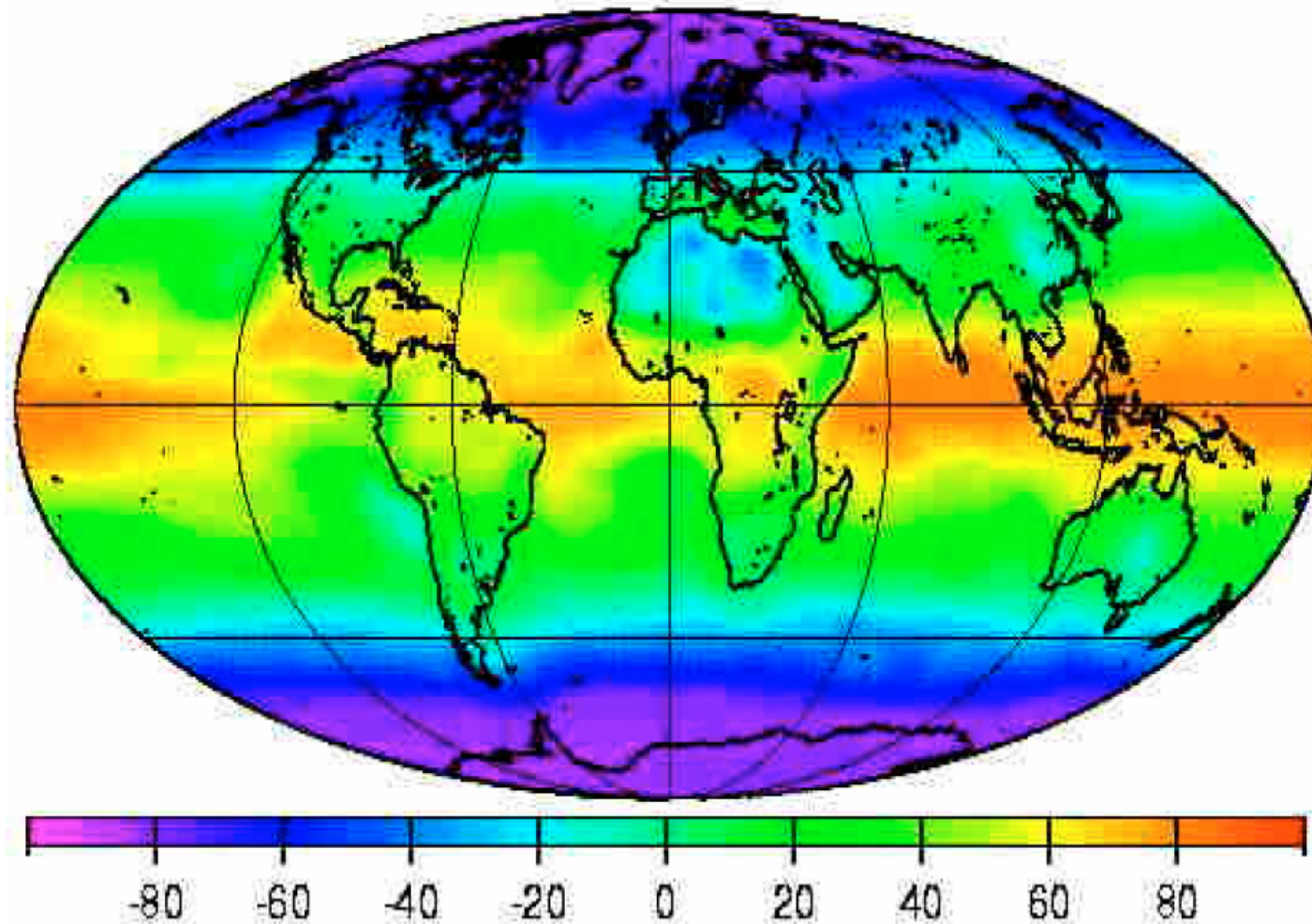
1. Modélisation numérique de l'écoulement atmosphérique. Les équations 'primitives'. Modes de discrétisation. La prévision météorologique numérique. Performances actuelles.
2. Description du système d'observation météorologique. Le problème de l'assimilation. Estimation bayésienne. Variables et fonctions aléatoires. Exemples météorologiques.
3. L'interpolation optimale'. Principales propriétés. Applications météorologiques. La théorie du 'Best Linear Unbiased Estimator'.
4. Les méthodes d'assimilation avancées.
  - Filtre de Kalman. Filtre de Kalman d'ensemble. Performances actuelles et perspectives.
  - Équations adjointes et assimilation variationnelle. Performances actuelles et perspectives.
5. Les méthodes d'assimilation avancées (suite).
  - Filtres bayésiens. Théorie, performances actuelles et perspectives.



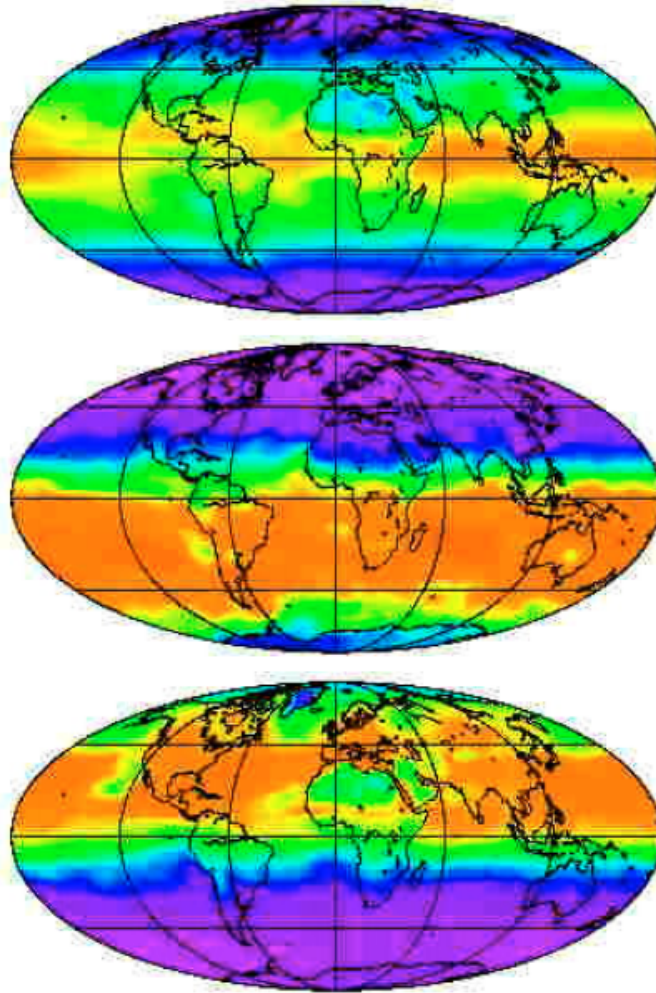


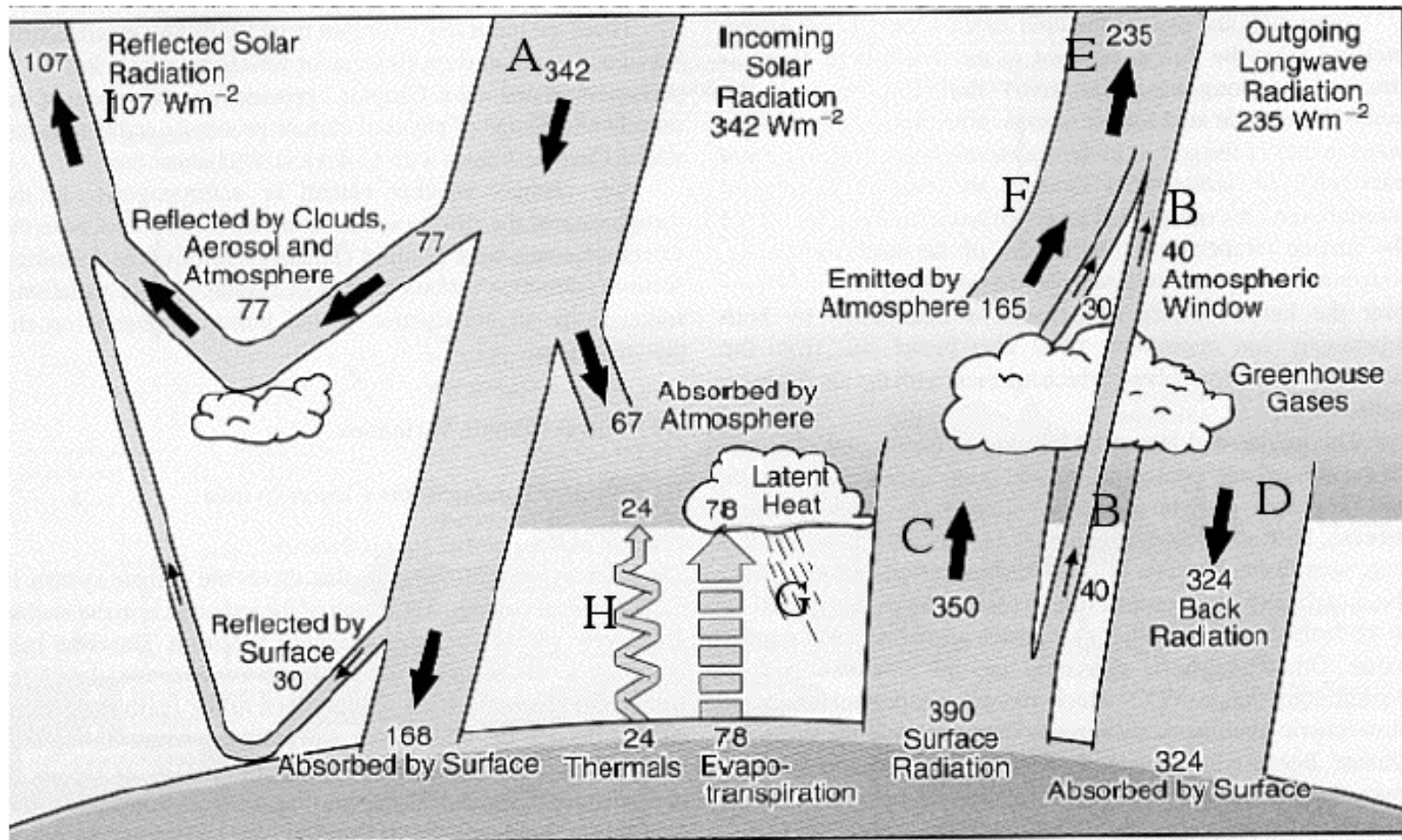
Bilan radiatif de la Terre, moyenné sur un an

## Bilan radiatif au sommet de l'atmosphère (en $\text{W m}^{-2}$ )



# Variations saisonnières du bilan radiatif





D'après K. Trenberth

Particle moves on sphere with radius  $R$   
under the action of a force lying  
in meridian plane of the particle

→ Angular momentum wrt axis of rotation conserved.

$$(u + \Omega R \cos\varphi) R \cos\varphi = Cst$$

On Earth,  $\Omega \approx 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $R \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

If  $u = 0$  at equator,  $u = 329 \text{ ms}^{-1}$  at latitude  $\varphi = 45^\circ$ . If  $u = 0$  at  $45^\circ$ ,  $u = -232 \text{ ms}^{-1}$  at equator.

Hadley, G., 1735, Concerning the cause of the general trade winds, *Philosophical Transactions of the Royal Society*



*The general circulation*

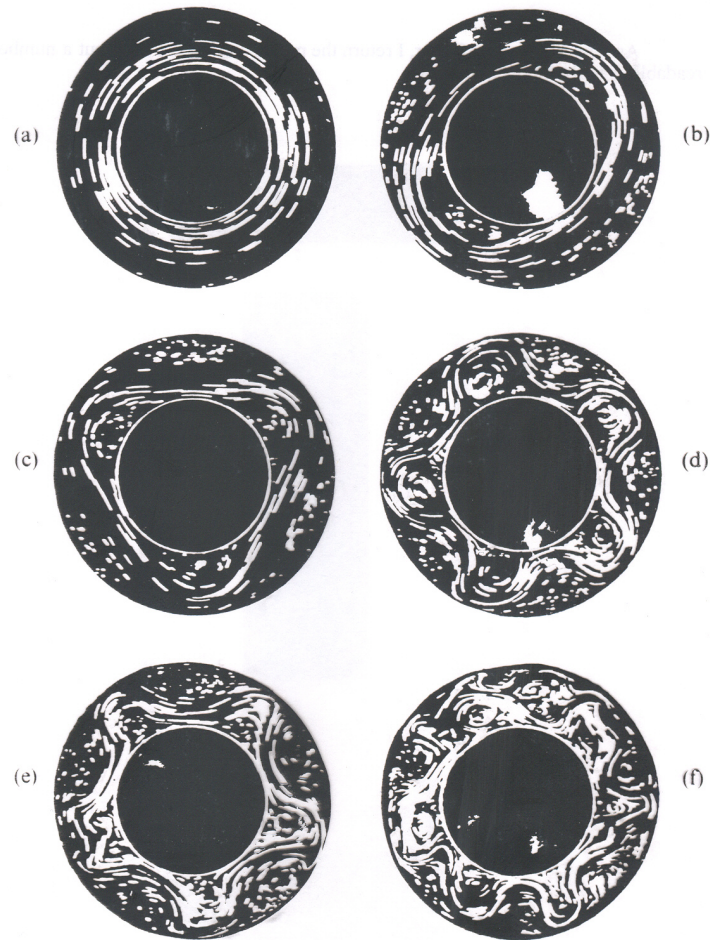


Fig. 10.1. Streak photographs illustrating the dependence of the flow type on rotation rate  $\Omega$  for a laboratory 'dishpan' experiment. The values of  $\Omega$  in  $\text{rad s}^{-1}$  are (a) 0.41; (b) 1.07; (c) 1.21; (d) 3.22; (e) 3.91; (f) 6.4. Working fluid was a water-glycerol solution of mean density  $1.037 \text{ g cm}^{-3}$  and kinematic viscosity  $1.56 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . The streak photographs show the flow at a depth of 0.5 cm below the free upper surface (see also problem 10.1.) (From Hide & Mason, 1975)

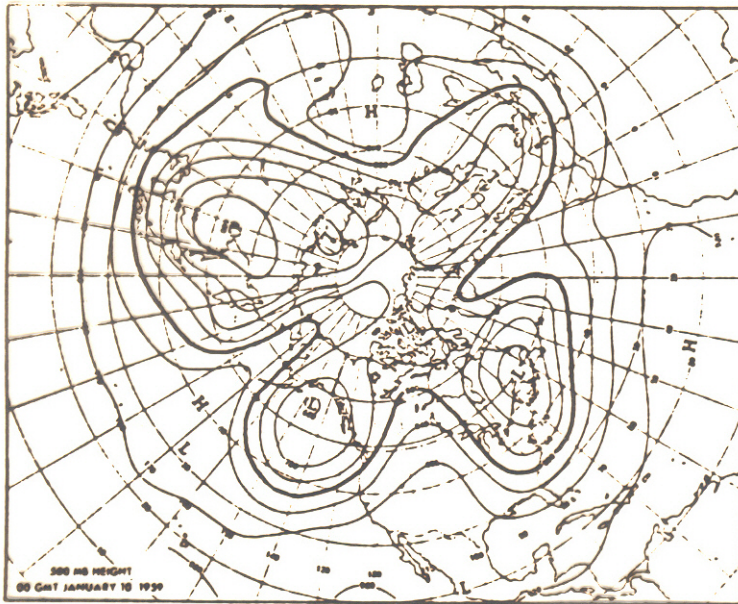
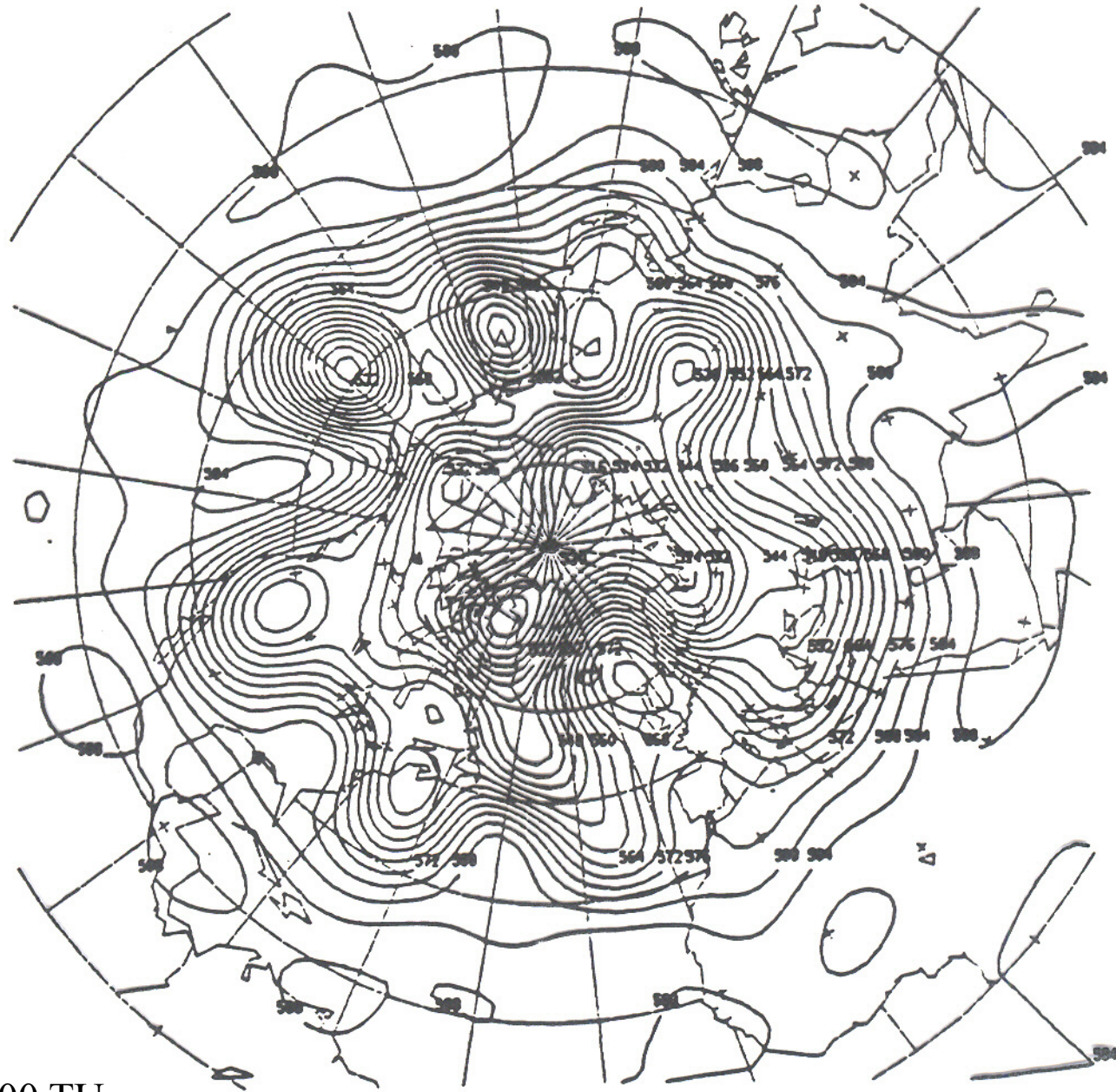


Figure 2. Comparison shows similarities between the global 500 mb pressure pattern in the upper atmosphere of the Northern Hemisphere and a four-wave pattern in the laboratory.

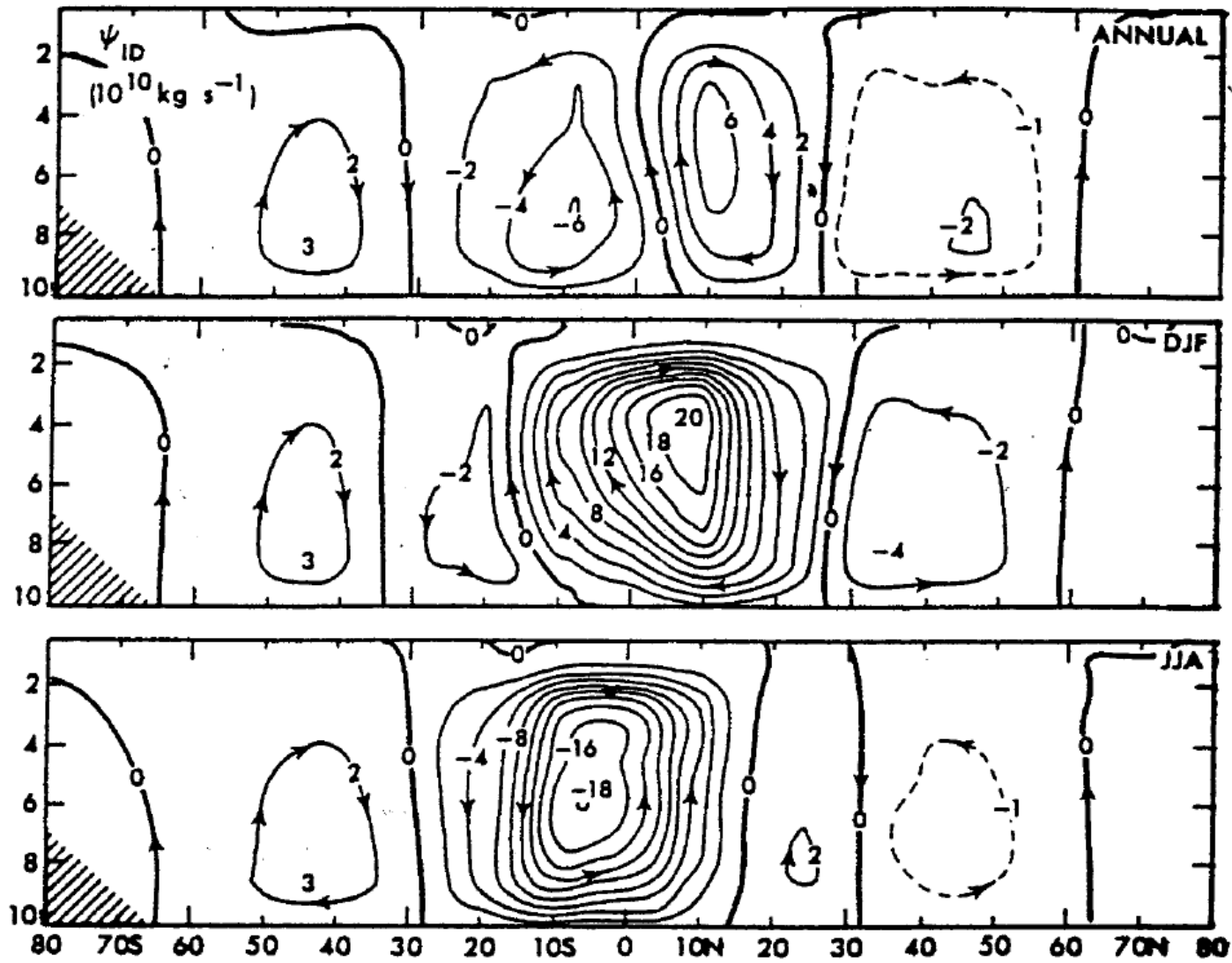
(Laboratory flow conditions were similar to those in Fig. 1, except  $\Omega = 1.95$  radians per sec.) In the atmosphere the flow is approximately parallel to the isobars (the flow is to the right,



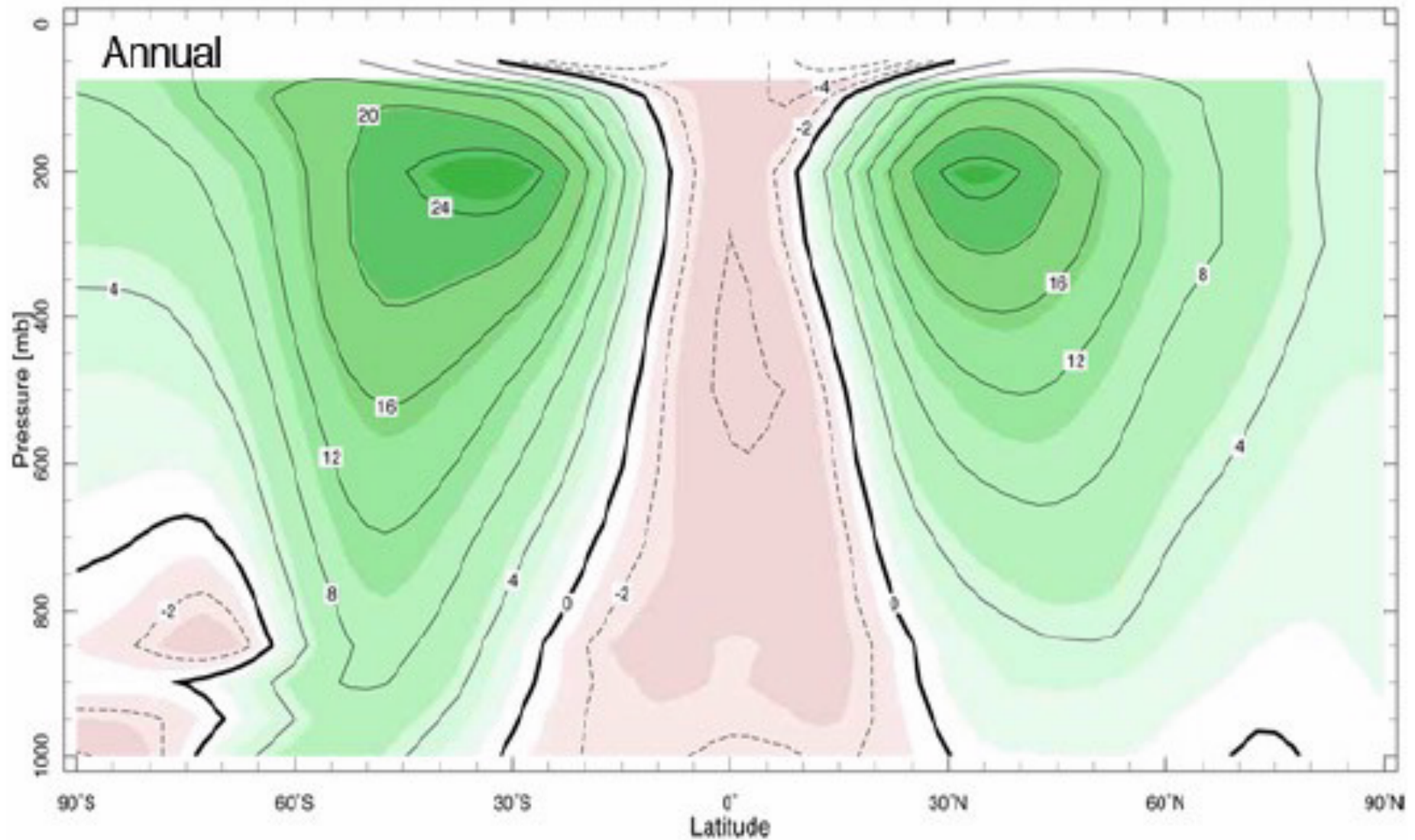
from high to low pressure), with speed inversely proportional to the spacing. Changes in the wave pattern have a significant effect on large-scale weather and climate.



26/04/1984, 00/00 TU



Peixoto and Oort, 1992, *The Physics of Climate*, Springer-Verlag

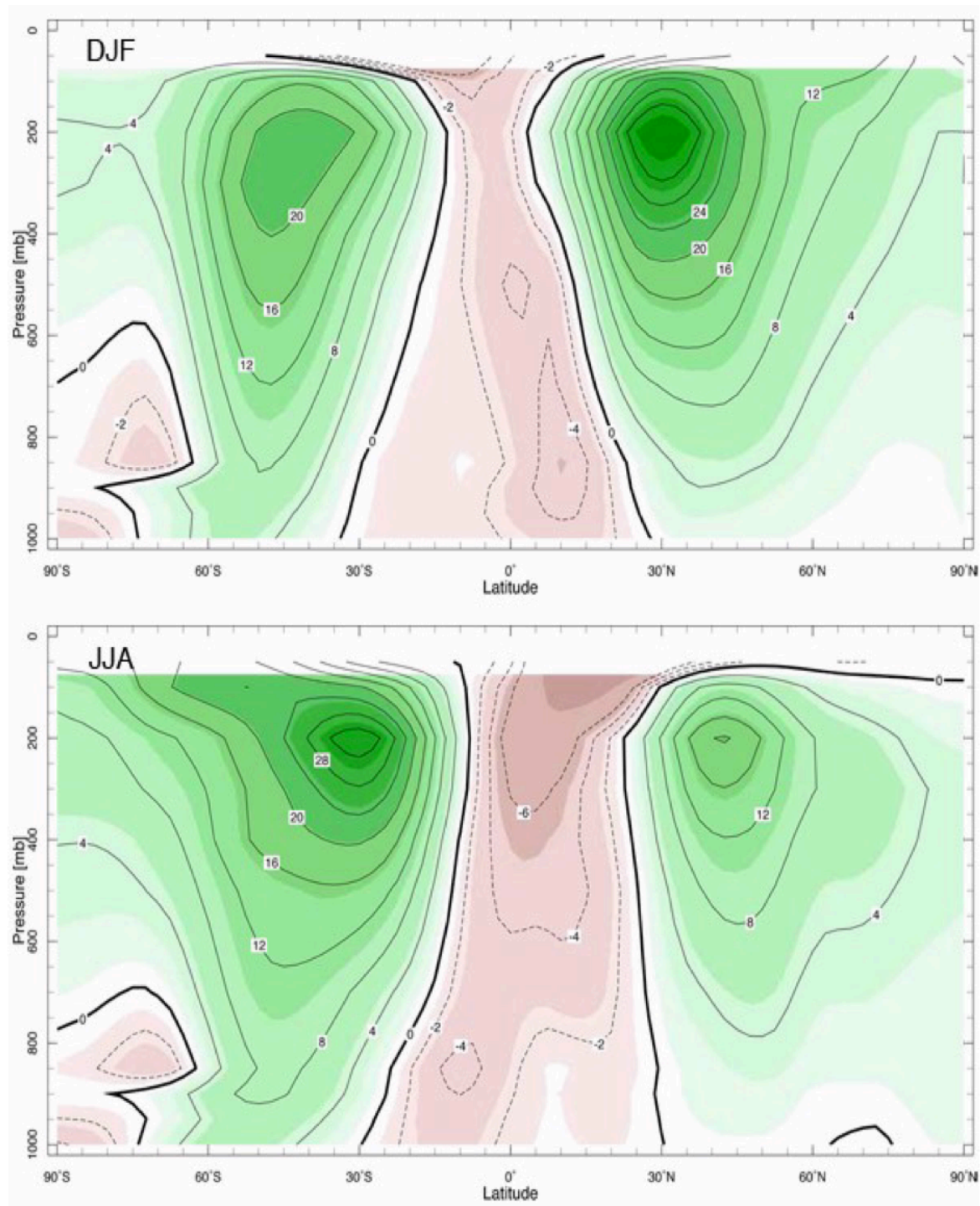


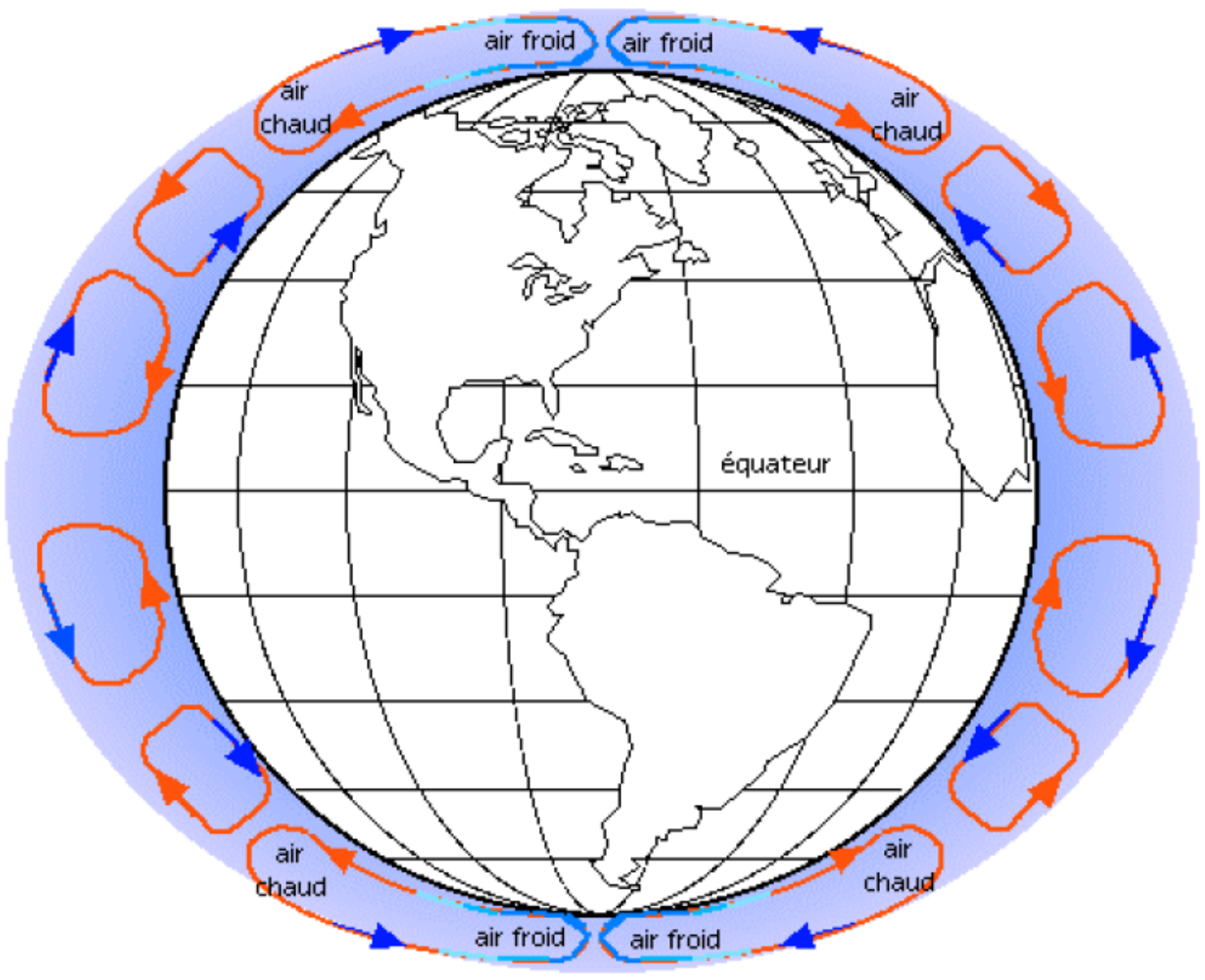
Vent zonal; moyenne longitudinale annuelle ( $\text{m.s}^{-1}$ )

<http://paoc.mit.edu/labweb/notes/chap5.pdf>,

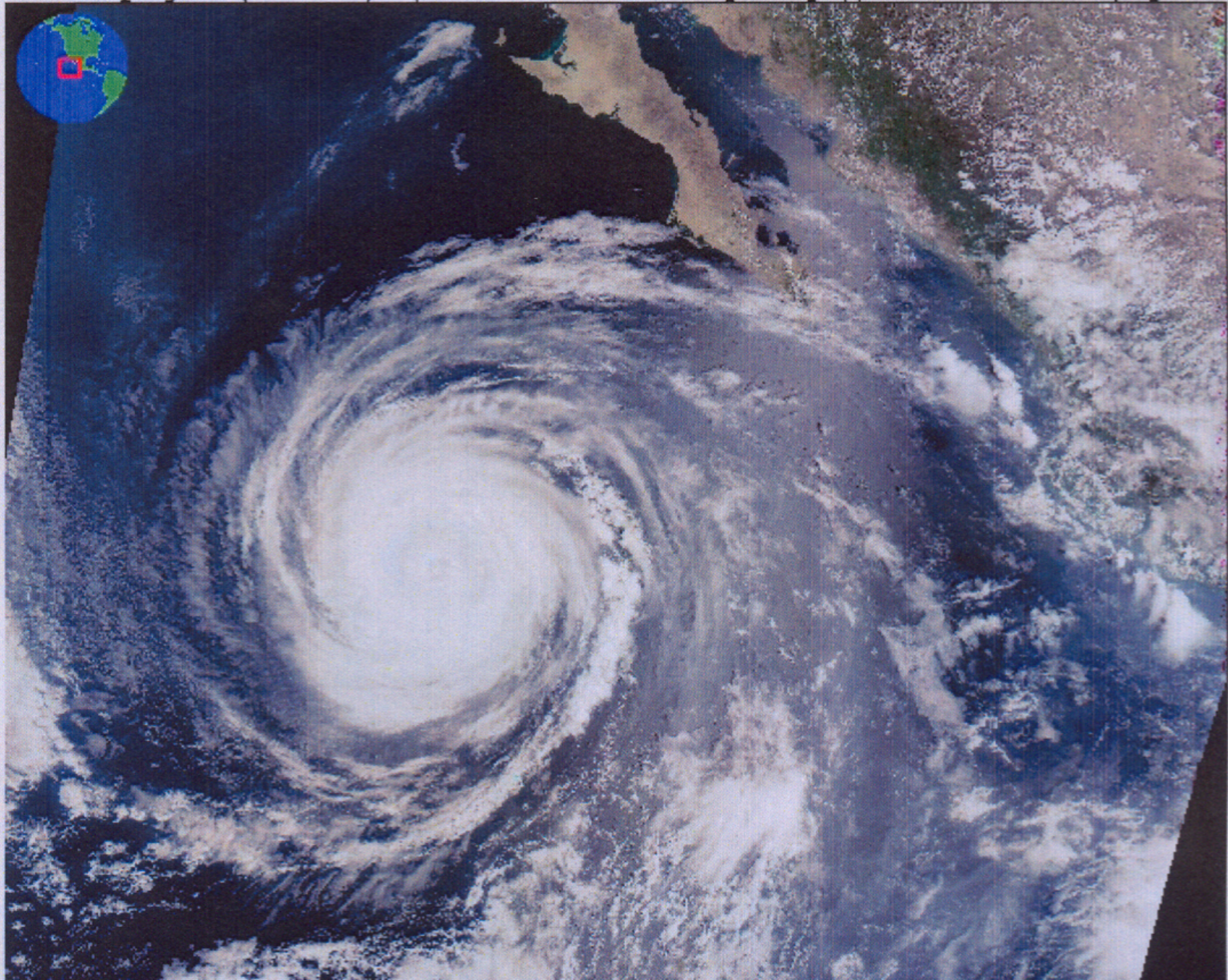
Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics, by J. Marshall and R. A. Plumb,  
International Geophysics, Elsevier)

Vent zonal;  
moyenne  
longitudinale  
saisonnière  
( $\text{m.s}^{-1}$ , *ibid.*)





. HDFLook project (LOA-USTL) (MODIS October 2 2002 [18h10] ((Hurricane Hernan (Baja Cali





## Lois physiques régissant l'écoulement

- Conservation de la masse

$$D\rho/Dt + \rho \operatorname{div}\underline{U} = 0$$

- Conservation de l'énergie

$$De/Dt - (p/\rho^2) D\rho/Dt = Q$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$D\underline{U}/Dt + (1/\rho) \operatorname{grad}p - \underline{g} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} = \underline{F}$$

- Equation d'état

$$f(p, \rho, e) = 0 \quad (p/\rho = rT, e = C_v T)$$

- Conservation de la masse de composants secondaires (eau pour l'atmosphère, sel pour l'océan, espèces chimiques, ...)

$$Dq/Dt + q \operatorname{div}\underline{U} = S$$

Lois physiques doivent en pratique être discrétisées dans le temps et dans l'espace  
⇒ *modèles numériques*, nécessairement imparfaits.

Les modèles utilisés pour la prévision météorologique de grande échelle et la simulation climatologique couvrent la totalité du volume de l'atmosphère. Ils sont, jusqu'à présent au moins, construits sur l'hypothèse *hydrostatique*

Dans la direction verticale :

$$\partial p / \partial z + \rho g = 0$$

Élimine l'équation du mouvement pour la direction verticale; en outre, l'écoulement est incompressible dans les coordonnées  $(x, y, p)$  ⇒ nombre d'équations diminué de deux unités.

Approximation hydrostatique valide pour échelles horizontales > 20-30 km

Modèles non-hydrostatiques, plus coûteux, sont utilisés pour la météorologie de petite échelle.

In addition to hydrostatic approximation, the following approximations are (almost) systematically made in global modeling :

- Atmospheric fluid is contained in a spherical shell with negligible thickness. This does not forbid the existence within the shell of a vertical coordinate which, in view of the hydrostatic equation, can be chosen as the pressure  $p$ .

- The horizontal component of the Coriolis acceleration due to the vertical motion is neglected (this approximation, sometimes called the *traditional approximation*, is actually a consequence of the previous one).

- Tidal forces are neglected.

These approximations lead to the so-called (and ill-named) *primitive equations*

There exist at present two forms of discretization

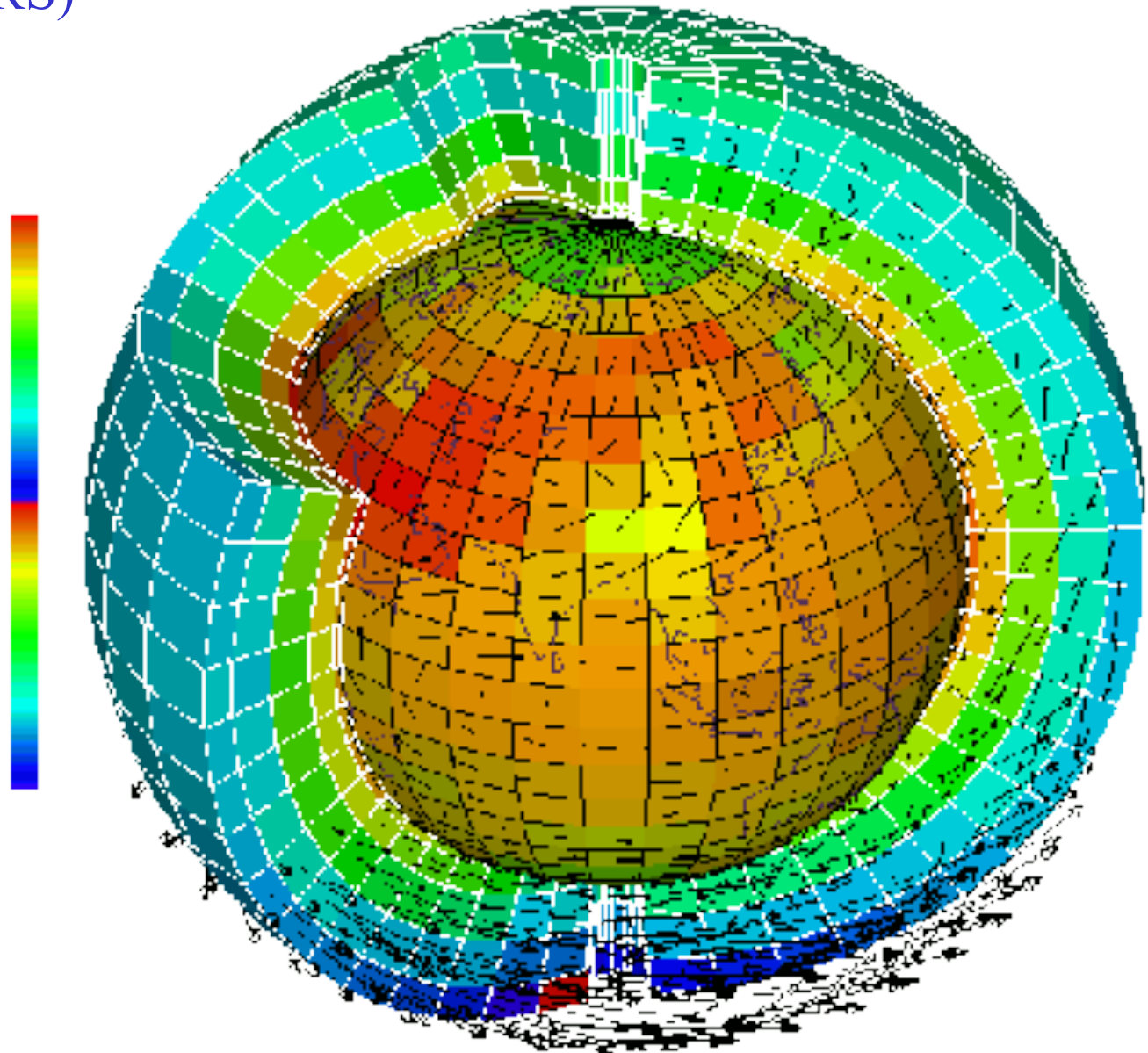
- Gridpoint discretization
- (Semi-)spectral discretization (mostly for global models, and most often only in the horizontal direction)

*Finite element discretization, which is very common in many forms of numerical modelling, is rarely used for modelling of the atmosphere. It is more frequently used for oceanic modelling, where it allows to take into account the complicated geometry of coast-lines.*

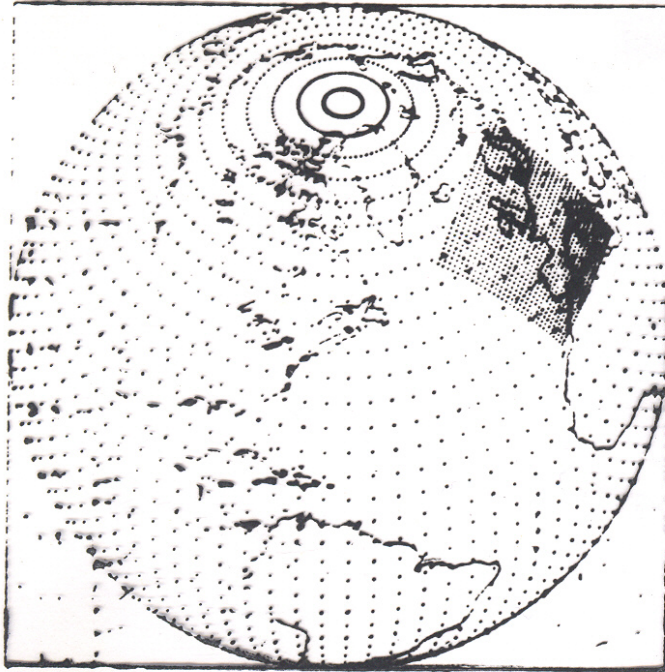
In gridpoint models, meteorological fields are defined by values at the nodes of a grid covering the physical domain under consideration. Spatial and temporal derivatives are expressed by finite differences.

In spectral models, fields are defined by the coefficients of their expansion along a prescribed set of basic functions. In the case of global meteorological models, those basic functions are the spherical harmonics (eigenfunctions of the laplacian at the surface of the sphere).

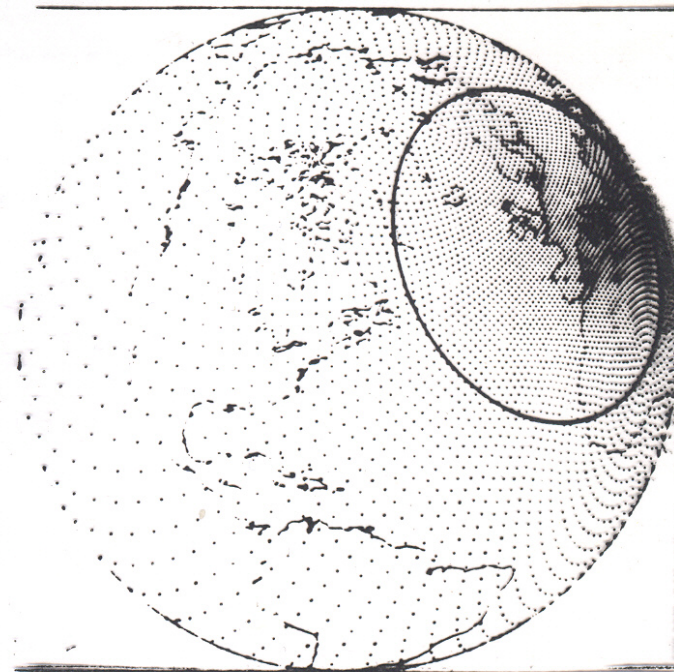
A schematic of an Atmospheric General Circulation Model (L. Fairhead /LMD-CNRS)



Grille Emerald-Péridot



Grille Arpège



Grilles de modèles de Météo-France (*La Météorologie*)

## Modèles (semi-)spectraux

$$T(\mu=\sin(\text{latitude}), \lambda=\text{longitude}) = \sum_{\substack{0 \leq n < \infty \\ -n \leq m \leq n}} T_n^m Y_n^m(\mu, \lambda)$$

où les  $Y_n^m(\mu, \lambda)$  sont les *harmoniques sphériques*

$$Y_n^m(\mu, \lambda) \propto P_n^m(\mu) \exp(im\lambda)$$

$P_n^m(\mu)$  est la *fonction de Legendre* de deuxième espèce.

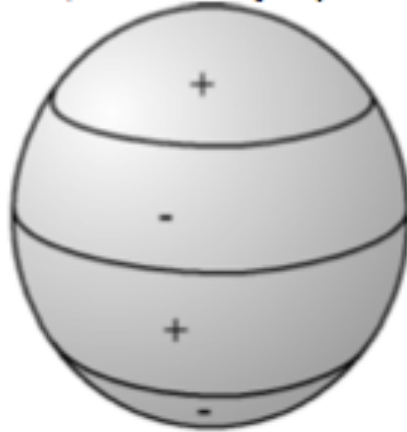
$$P_n^m(\mu) \propto (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n$$

$n$  et  $m$  sont respectivement le *degré* et l'*ordre* de l'harmonique  $Y_n^m(\mu, \lambda)$



Гомогенная, не плоская сферическая

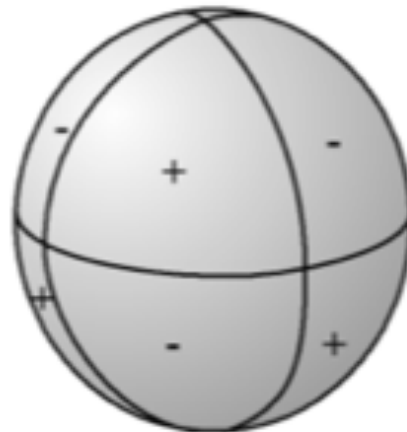
$$l = 3$$
$$m = 0$$
$$l - m = 3$$



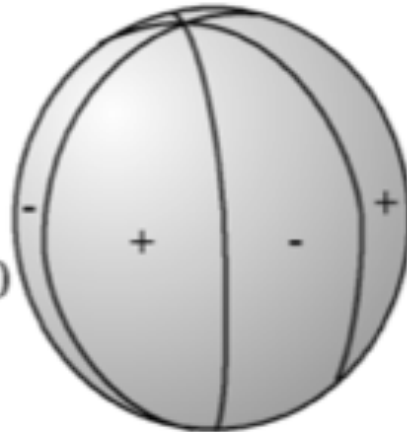
$$l = 3$$
$$m = 1$$
$$l - m = 2$$



$$l = 3$$
$$m = 2$$
$$l - m = 1$$



$$l = 3$$
$$m = 3$$
$$l - m = 0$$



$$l = 5$$
$$m = 2$$
$$l - m = 3$$



## Modèles (semi-)spectraux

Les harmoniques sphériques définissent une base complète orthonormée de l'espace  $L^2$  à la surface  $S$  de la sphère.

$$\int_S Y_n^m Y_{n'}^{m'} d\mu d\lambda = \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}$$

Relation de Parseval

$$\int_S T^2(\mu, \lambda) d\mu d\lambda = \sum_{\substack{0 \leq n < \infty \\ -n \leq m \leq n}} |T_n^m|^2$$

Les harmoniques sphériques sont fonctions propres du laplacien à la surface de la sphère

$$\Delta Y_n^m = -n(n+1)Y_n^m$$

Troncature ‘triangulaire’  $TN$  ( $n \leq N, -n \leq m \leq n$ ) indépendante du choix d’un axe polaire. Représentation est parfaitement homogène à la surface de la sphère

Calculs non linéaires effectués dans l’espace physique (sur grille latitude-longitude ‘gaussienne’). Les transformations requises sont possibles à un coût non prohibitif grâce à l’utilisation de Transformées de Fourier Rapides (*Fast Fourier Transforms*, *FFT*, en anglais). Il existe aussi une version rapide des Transformées de Legendre, relatives à la variable  $\mu$ .