École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Ile-de-France
Année 2016-2017

Cours *Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique et Assimilation d'Observations*
(Olivier Talagrand, avril-juillet 2017)

Récapitulatif sur les Équations Primitives

Les équations dites *primitives*, utilisées dans les modèles numériques de circulation atmosphérique et océanique, sont fondées sur les hypothèses suivantes :

- Le fluide est en équilibre hydrostatique.
- Le fluide est contenu dans une surface sphérique de rayon *a* et d'épaisseur nulle. Cela n'empêche pas qu'il existe à l'intérieur du fluide une coordonnée verticale qui, du fait de l'hypothèse hydrostatique, peut être choisie comme étant la pression *p*.
- La composante horizontale de la force de Coriolis résultant du mouvement vertical est négligeable (cette hypothèse, imposée en fait par la précédente, est dite *approximation traditionnelle*).
- La force des marées est négligeable.

Dans le cas atmosphérique, on suppose en outre que le fluide est un gaz parfait. Les coordonnées indépendantes étant la coordonnée horizontale zonale *x*, comptée positivement vers l'est, la coordonnée horizontale méridienne *y*, comptée positivement vers le nord, la pression *p* et le temps *t*, les équations primitives, écrites dans le référentiel de la planète en rotation, sont les suivantes :

- Bilan de quantité de mouvement projeté sur le plan horizontal

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv}{a} tg\phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\,\Omega v\, sin\phi + F_x \qquad \text{(P1a)}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2}{a} tg\phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - 2\Omega u\, sin\,\phi + F_y \qquad \text{(P1b)}$$

- Bilan d'énergie

$$\frac{Dh}{Dt} - \frac{\omega}{\rho} = Q \qquad \text{(P2)}$$

- Bilan de masse d'eau

$$\frac{Dq}{Dt} = S \qquad \text{(P3)}$$

- Bilan de masse (équation de 'continuité')

$$div_H U_H + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial p} = 0 \qquad \text{(D1)}$$

- Bilan de masse intégré sur l'épaisseur du fluide

$$\frac{Dp_s}{Dt} + \int_0^{p_s} div_H \boldsymbol{U}_H \, dp = 0 \qquad \text{(P4)}$$

- Équation hydrostatique

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial p} + \frac{1}{\rho} = 0 \qquad \text{(D2)}$$

- Équation d'état du fluide

$$\frac{p}{\rho} = rT \qquad \text{(D3)}$$

Dans ces équations, les variables *pronostiques*, dont l'évolution temporelle est explicitement calculée, sont :

- les deux composantes u et v de la vitesse horizontale $U_H = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ étant les vecteurs unitaires dans les directions x et y respectivement.
- l'enthalpie spécifique $h = C_pT$.
- la masse d'eau q par unité de volume $dxdydp$.
- la pression au sol p_s.

Les variables u, v, h et q sont fonctions des trois coordonnées d'espace et du temps, la variable p_s est fonction des deux coordonnées horizontales et du temps.

Les variables *diagnostiques*, définies à tout instant à partir des variables pronostiques, sont :

- la vitesse verticale $\omega = Dp/Dt$, définie par intégration de l'équation de bilan de masse (D1) à partir d'une condition appropriée à la limite supérieure (par exemple $\omega = 0$ au niveau $p = 0$).
- la masse volumique ρ de l'air humide, définie par l'équation d'état (D3).
- le géopotentiel $\boldsymbol{\Phi}$, défini par intégration de l'équation hydrostatique (D2) à partir de la valeur du géopotentiel en surface, donnée par la géographie.

La notation désigne D/Dt une dérivée particulaire

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}$$

où $\partial/\partial t$ est la dérivée eulérienne, prise à (x, y, p) fixés.

Les autres quantités sont :
T : température absolue
r : constante des gaz parfaits pour l'air humide.
C_p : chaleur massique de l'air humide à pression constante.
a : rayon de la planète.
Ω : rotation angulaire de la planète.
ϕ : latitude.

Les *termes sources* F_x, F_y, Q et S sont respectivement les composantes suivant x et y des forces de frottement et de viscosité par unité de masse de fluide, l'échauffement diabatique par unités de masse et de temps, et la source d'humidité par unités de volume et de temps. On suppose qu'on dispose d'une représentation paramétrique de ces différents termes, en fonction des coordonnées x, y, p et t, et des différentes variables pronostiques et diagnostiques.

Certains modèles distinguent les trois phases de l'eau (ou même plus, si les différents types de météores solides et/ou liquides sont pris en compte). Chacune des phases évolue alors suivant une équation de la forme (P3), les termes sources correspondants décrivant, entre autres effets, les changements de phases éventuels de l'eau. Ces changements de phase sont associés à une libération ou une absorption de chaleur latente, qui doit être prise en compte dans le terme de forçage thermique Q. De plus en plus fréquemment, des composants secondaires divers sont introduits dans les modèles (l'ozone par exemple). Ces composants évoluent aussi suivant une équation de type (P3), incluant un terme source approprié.

Les équations primitives sont utilisées pour la prévision météorologique numérique ainsi que la simulation numérique du climat. Elles sont utilisées également (avec les changements requis pour les différentes constantes) pour la simulation de la circulation des atmosphères des planètes et satellites planétaires telluriques (Mars, Vénus, Titan, Triton). Elles sont enfin utilisées, avec une équation d'état appropriée, pour la simulation numérique de la circulation océanique, le composant secondaire principal étant alors la salinité.