

Cours *Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique et Assimilation  
d'Observations*  
(Olivier Talagrand, avril-juin 2008)

### Récapitulatif sur les Équations Primitives

Les équations dites *primitives*, utilisées dans les modèles numériques de circulation atmosphérique et océanique, sont fondées sur les hypothèses suivantes :

- les surfaces isopotentielles du champ de gravité apparente dans le référentiel de la planète en rotation sont sphériques; la gravité apparente est constante dans le temps et dans l'espace.
- l'épaisseur de la couche fluide est négligeable devant le rayon de la planète, supposée de forme sphérique
- la force des marées est négligeable
- le fluide est en équilibre hydrostatique

Dans le cas atmosphérique, on suppose en outre que le fluide est un gaz parfait. Les coordonnées indépendantes étant la coordonnée horizontale zonale  $x$ , comptée positivement vers l'est, la coordonnée horizontale méridienne  $y$ , comptée positivement vers le nord, la pression  $p$  et le temps  $t$ , les équations primitives, écrites dans le référentiel de la planète en rotation, sont les suivantes :

- Bilan de quantité de mouvement projeté sur le plan horizontal

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv}{a} \operatorname{tg} \phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi + F_x \quad (\text{P1a})$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2}{a} \operatorname{tg} \phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + F_y \quad (\text{P1b})$$

- Bilan d'énergie

$$\frac{Dh}{Dt} - \frac{\omega}{\rho} = Q \quad (\text{P2})$$

- Bilan de masse d'eau

$$\frac{Dq}{Dt} = S \quad (\text{P3})$$

- Bilan de masse (équation de 'continuité')

$$\text{div}_H U_H + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (\text{D1})$$

- Bilan de masse intégré sur l'épaisseur du fluide

$$\frac{Dp_s}{Dt} + \int_0^{p_s} \text{div}_H U_H dp = 0 \quad (\text{P4})$$

- Équation hydrostatique

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho} = 0 \quad (\text{D2})$$

- Équation d'état du fluide

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (\text{D3})$$

Dans ces équations, les variables *pronostiques*, dont l'évolution temporelle est explicitement calculée, sont :

- les deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse horizontale  $U_H = ui + vj$ ,  $i$  et  $j$  étant les vecteurs unitaires dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.
- l'enthalpie spécifique  $h = C_p T$ .
- la masse de l'eau  $q$  par unité de volume  $dxdydp$ .
- la pression au sol  $p_s$ .

Les variables  $u$ ,  $v$ ,  $h$  et  $q$  sont fonctions des trois coordonnées d'espace et du temps, la variable  $p_s$  est fonction des deux coordonnées horizontales et du temps.

Les variables *diagnostiques*, définies à tout instant à partir des variables pronostiques, sont :

- la vitesse verticale  $\omega = Dp/Dt$ , définie par intégration de l'équation de bilan de masse (D1) à partir d'une condition appropriée à la limite supérieure (par exemple  $\omega = 0$  au niveau  $p = 0$ ).
- la masse volumique de l'air  $\rho$ , définie par l'équation d'état (D3).
- le géopotential  $\Phi$ , défini par intégration de l'équation hydrostatique (D2) à partir de la valeur du géopotential en surface, donnée par la géographie.

La notation désigne  $D/Dt$  une dérivée particulière

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

Les autres quantités sont :

$T$  : température absolue

$r$  : constante des gaz parfaits pour l'air humide.

$C_p$  : chaleur massique de l'air humide à pression constante.

$a$  : rayon de la planète.

$\Omega$  : rotation angulaire de la planète.

$\phi$  : latitude.

Les *termes sources*  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $Q$  et  $S$  sont respectivement les composantes suivant  $x$  et  $y$  des forces de frottement et de viscosité par unité de masse de fluide, l'échauffement diabatique par unités de masse et de temps, et la source d'humidité par unités de volume et de temps. On suppose qu'on dispose d'une représentation paramétrique de ces différents termes, en fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $p$  et  $t$ , et des différentes variables pronostiques et diagnostiques.

Certains modèles distinguent les trois phases de l'eau. Chacune des phases évolue alors suivant une équation de la forme (P3), les termes sources correspondants décrivant, entre autres effets, les changements de phases éventuels de l'eau. Ces changements de phase sont associés à une libération ou une absorption de chaleur latente, qui doit être prise en compte dans le terme de forçage thermique  $Q$ . De plus en plus fréquemment, des composants secondaires divers sont introduits dans les modèles (l'ozone par exemple). Ces composants évoluent aussi suivant une équation de type (P3), incluant un terme source approprié.

Les équations primitives sont utilisées pour la prévision météorologique numérique ainsi que la simulation numérique du climat. Elles sont utilisées également (avec les changements requis pour les différentes constantes) pour la simulation de la circulation des atmosphères des planètes et satellites planétaires telluriques (Mars, Vénus, Titan, Triton). Elles sont enfin utilisées, avec une équation d'état appropriée, pour la simulation numérique de la circulation océanique, le composant secondaire principal étant alors la salinité.