École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Ile-de-France. Année 2007-2008

Cours

Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique

et Assimilation d'Observations

(Olivier Talagrand, avril-juin 2008)

Contrôle

30 Juin 2008, de 10h30 à 12h30

Documents autorisés : notes de cours,

documents déposés sur le site du cours (sous forme imprimée)

Calculettes de poche autorisées

Les trois parties du contrôle sont indépendantes (cependant, les résultats de la partie A, sans être indispensables, peuvent aider à répondre à la question B4).

Les trois parties contribueront chacune à un tiers de la note totale.

On se situe dans le contexte général du cours, à savoir l'estimation linéaire au minimum de variance. On ignorera donc toute non-linéarité éventuelle.

Les erreurs affectant les données seront supposées centrées (de moyenne statistique nulle).

A. **Séquentialité de l'estimation**

Le but de cette partie est de répondre à la question suivante. Une 'analyse' $\underline{x}^a$ de l'état de l'écoulement $\underline{x}$, optimale au sens l'estimation linéaire au minimum de variance (*BLUE*), ayant été déterminée à partir d'un premier ensemble de données, une nouvelle donnée $\underline{y}$ (scalaire ou vectorielle) devient disponible. Est-il nécessaire, pour obtenir un nouvel estimé au sens du *BLUE*, de recommencer le processus d'estimation *ab initio*, ou suffit-il de combiner $\underline{x}^a$ et $\underline{y}$ de façon appropriée ?

1. L'estimation est limitée à un scalaire x, pour lequel on dispose au départ de deux observations de la forme :

$$z_1 = x + \zeta_1$$
$$z_2 = x + \zeta_2$$

où les erreurs ζ_1 et ζ_2 sont supposées de même variance s [$E(\zeta_1^2) = E(\zeta_2^2) = s$], et décorrélées [$E(\zeta_1\zeta_2) = 0$].

Quel est le *BLUE* de x à partir de z_1 et z_2 (on pourra si on le souhaite considérer l'une quelconque des deux observations comme une 'ébauche', et l'autre comme une donnée complémentaire utilisée pour corriger l'ébauche) ? Quelle est la variance de l'erreur d'estimation correspondante ?

Corrigé. Considérons z_1 comme une ébauche, et z_2 comme une observation à l'aide de laquelle on va corriger l'ébauche. Dans les notations du cours, l'innovation est la différence z_2 - z_1, l'opérateur d'observation H est le scalaire unité, les covariances d'erreur d'ébauche P^b et d'erreur d'observation R sont toutes deux égales au scalaire s. L'erreur d'observation étant décorrélée de l'erreur d'ébauche, on peut utiliser directement la formule donnée sur la diapositive 6.8 du cours. La matrice $H\,P^b\,H^T + R$ est le scalaire $2s$, et l'on obtient pour le *BLUE* recherché :

$$x^a{}_1 = z_1 + (1/2)\,(z_2\text{-}z_1) = (1/2)\,(z_1\text{+}z_2)$$

(ce résultat peut être obtenu plus directement en remarquant que, du fait de la symétrie entre z_1 et z_2, la meilleure combinaison linéaire de ces deux quantités est nécessairement leur moyenne arithmétique).

L'erreur d'estimation correspondante $(1/2)\,(z_1\text{+}z_2) - x = (1/2)\,(\zeta_1\text{+}\zeta_2)$ a pour variance $s/2$.

2. Une troisième observation devient alors disponible, de la forme :

$$z_3 = x + \zeta_3$$

où l'erreur ζ_3 a la même variance s que ζ_1 et ζ_2, est décorrélée de ζ_1 [$E(\zeta_1\zeta_3) = 0$], mais est corrélée avec ζ_2 [$E(\zeta_2\zeta_3) = cs$, $c \neq 0$].
On estime alors x en considérant l'estimation obtenue à la question 1 comme une 'ébauche' mise à jour à l'aide de z_3. Quel est le rapport des poids affectés à z_1 et z_2 dans cet estimé (aucun calcul n'est nécessaire pour répondre à cette question) ?

Corrigé. Le nouvel estimé sera une combinaison linéaire de $x^a{}_1$ et de z_3. Les observations z_1 et z_2 ayant des poids égaux dans $x^a{}_1$, il en sera de même dans le nouvel estimé.

3. Ignorant le résultant de 1, on reprend l'estimation *ab initio*, en cherchant le *BLUE* de x à partir des trois observations z_1, z_2, z_3 prises globalement.

A cette fin, on considère z_1 comme une ébauche, mise à jour à l'aide de z_2 et z_3. Donner l'expression de la fonction objective dont la minimisation fournit l'estimation recherchée.

Corrigé. La fonctionnelle recherchée est donnée dans la diapositive 7.3 du cours (ou bien par l'équation 10 du formulaire)

$$J(\xi) \;=\; (1/2)\,(x^b - \xi)^T\,[P^b]^{-1}\,(x^b - \xi) + \;(1/2)\,(\underline{y} - H\xi)^T R^{-1}\,(\underline{y} - H\xi)$$

où, comme dans la question 1, l'ébauche x^b est l'observation z_1, et la matrice de covariance P^b est la variance s. Le vecteur d'observation est maintenant $\underline{y} = (z_2, z_3)^T$, et l'opérateur d'observation correspondant est $H = (1, 1)^T$. La matrice de covariance des erreurs d'observation est, suivant les hypothèses faites

$$R = s\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$R^{-1} = \frac{1}{s(1-c^2)} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

soit en définitive

$$J(\xi) \;=\; 1/(2s)\ \{(z_1 - \xi)^2 + 1/(1-c^2)\ [(z_2 - \xi)^2 - 2c(z_2 - \xi)(z_3 - \xi) + (z_3 - \xi)^2]\}$$

4. Le rapport des poids affectés à z_1 et z_2 est-il le même dans ce nouvel estimé que dans la question 2 ?

Corrigé. L'estimation recherchée est obtenue en écrivant que la dérivée de J par rapport à ξ est nulle. Sans même effectuer les calculs entièrement, on voit facilement que les poids affectés dans l'estimation à z_1, z_2, z_3 sont dans les proportions $(1+c, 1, 1)$. Pour $c \neq 0$, les poids affectés à à z_1 et z_2 ne sont donc pas égaux.

5. Quelle réponse donnez-vous à la question générale posée au début de l'exercice ?

Corrigé. Du fait de la corrélation c entre les erreurs ζ_2 et ζ_3, l'estimation séquentielle (question 2) ne fournit pas le *BLUE* de x à partir de z_1, z_2, z_3 globalement. La réponse à la question générale posée au début du problème est claire. Si les erreurs affectant la nouvelle donnée $\underline{y}$ sont décorrélées des erreurs affectant le premier ensemble de données, il suffit de mettre à jour l'estimation $\underline{x}^a$ en la combinant de façon optimale avec $\underline{y}$ (c'est ce qui est fait dans le filtre de Kalman). Si au contraire les erreurs affectant $\underline{y}$ sont corrélées aux erreurs affectant les données ayant produit $\underline{x}^a$, il est nécessaire de reprendre le processus d'estimation *ab initio*.

B. **Inverser ou non *a priori* les observations satellitaires ?**

On a discuté dans le cours la question de la nécessité, ou non, d'inverser les observations satellitaires avant de les introduire dans un processus d'assimilation. On a montré que, dans le cadre de la théorie générale du *BLUE*, une inversion préalable n'est pas nécessaire. Cet exercice étudie quelques aspects de cette question générale.

1. On suppose, comme on l'a fait dans le cours, que l'on veut estimer le profil de température $\underline{x} = (x_1 , \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ aux n niveaux d'un point de grille d'un modèle. Et l'on suppose que l'on dispose à cette fin :

- d'une ébauche $\underline{x}^b = \underline{x} + \underline{\zeta}^b$, où l'erreur $\underline{\zeta}^b$ a pour matrice de covariance $P^b = E(\underline{\zeta}^b \underline{\zeta}^{b\mathrm{T}})$

- d'un vecteur d'observations ('satellitaires') $\underline{y} = H\underline{x} + \underline{\varepsilon}$, de dimension p, où l'opérateur d'observation H est linéaire, et où l'erreur $\underline{\varepsilon}$ a pour matrice de covariance $R = E(\underline{\varepsilon}\,\underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}})$

Montrer sans calcul qu'une inversion linéaire préalable de $\underline{y}$ ne peut en aucun cas fournir une estimation de $\underline{x}$ qui serait plus précise, au sens du minimum de variance, que le *BLUE* obtenu directement à partir de $\underline{x}^b$ et $\underline{y}$.

On supposera désormais que les erreurs $\underline{\zeta}^b$ et $\underline{\varepsilon}$ sont décorrélées $[E(\underline{\zeta}^b \underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}) = 0]$.

Corrigé. Le *BLUE* est par construction la meilleure combinaison linéaire (au sens du minimum de variance) de l'ébauche $\underline{x}^b$ et du vecteur d'observation $\underline{y}$. Une inversion linéaire préalable de $\underline{y}$, combinée à $\underline{x}^b$, produira encore une combinaison linéaire de $\underline{x}^b$ et de $\underline{y}$, qui ne pourra en aucun cas être plus précise que le *BLUE* d'origine.

2. Donner l'expression du *BLUE* de $\underline{x}$ à partir de $\underline{x}^b$ et $\underline{y}$.

Corrigé. L'expression est donnée par la diapositive 6.8 du cours (ou bien l'expression 9a du formulaire)

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^b H^{\mathrm{T}} [HP^bH^{\mathrm{T}} + R]^{-1} (\underline{y} - H\underline{x}^b) \qquad (1)$$

3. On suppose maintenant que l'opérateur H est inversible (ce qui requiert $p=n$) et que l'on transforme $\underline{y}$ en $\underline{u} = H^{-1}\underline{y}$. Que sont l'opérateur d'observation, le vecteur innovation et la matrice de covariance d'erreur d'observation associés à $\underline{u}$? Donner l'expression du *BLUE* de $\underline{x}$ à partir de $\underline{x}^b$ et $\underline{u}$, et comparez-la à l'expression donnée en 2. Commentez.

Corrigé. L'inverse

$$\underline{u} = H^{-1}\underline{y} = \underline{x} + H^{-1}\underline{\varepsilon}$$

est associé à l'opérateur d'observation unité I_n d'ordre n, et est affecté par l'erreur $H^{-1}\underline{\varepsilon}$. Le vecteur innovation correspondant est $\underline{u} - \underline{x}^b = H^{-1}(\underline{y} - H\underline{x}^b)$. Quant à la matrice de covariance d'erreur d'observation, elle est égale à $E[H^{-1}\underline{\varepsilon}\,(H^{-1}\underline{\varepsilon})^{\mathrm{T}}] = H^{-1}RH^{-\mathrm{T}}$ (où $H^{-\mathrm{T}}$ désigne la transposée de l'inverse H^{-1}).

Le *BLUE* $\underline{x}'^a$ de $\underline{x}$ à partir de $\underline{x}^b$ et $\underline{u}$ est donné par la formule (1), en remplaçant H par I_n, R par $H^{-1}RH^{-\mathrm{T}}$ et $\underline{y} - H\underline{x}^b$ par $\underline{u} - \underline{x}^b$, soit

$$\underline{x}'^a = \underline{x}^b + P^b [P^b + H^{-1}RH^{-\mathrm{T}}]^{-1} (\underline{u} - \underline{x}^b)$$

Notant que $P^b + H^{-1}RH^{-\mathrm{T}} = H^{-1}[HP^bH^{\mathrm{T}} + R]H^{-\mathrm{T}}$, on voit que $\underline{x}'^a$ est égal à $\underline{x}^a$. L'inversion $\underline{y} \rightarrow \underline{u}$ ne modifie pas le *BLUE*, pourvu que l'opérateur d'observation et la matrice de covariance d'erreur d'observation soient transformés de façon cohérente avec l'inversion.

4. Dans quelles conditions précises une inversion linéaire préalable de $\underline{y}$ (ou, plus généralement, une transformation linéaire quelconque préalable de $\underline{y}$) conduit-elle au même résultat que le *BLUE* produit directement à partir de $\underline{x}^b$ et de $\underline{y}$ (on pourra discuter particulièrement le cas $p>n$) ?

Corrigé. Le point important est la perte, on non, d'information dans la transformation préalable. Si cette transformation est inversible, le résultat final ne dépend pas du fait que la transformation ait été effectuée ou non (pourvu bien sûr que l'opérateur d'observation et la matrice de covariance d'erreur d'observation soient modifiés de façon cohérente avec la transformation). Dans le cas $p < n$, il n'est évidemment pas possible de transformer $\underline{y}$ en une estimation de $\underline{x}$, mais le *BLUE* est invariant dans toute transformation linéaire inversible de $\underline{y}$. Le cas $p > n$ pose un problème intéressant. En règle générale, il sera possible d'obtenir une estimation optimale de $\underline{x}$, soit $\underline{x}^\alpha$, à partir de $\underline{y}$ seul. Si les erreurs affectant $\underline{y}$, et donc $\underline{x}^\alpha$, sont décorrélées des erreurs affectant l'ébauche $\underline{x}^b$, le *BLUE* de $\underline{x}$ obtenu à partir de $\underline{x}^b$ et $\underline{x}^\alpha$ sera identique au *BLUE* obtenu directement à partir de $\underline{x}^b$ et $\underline{y}$.

5. Faites tous commentaires que vous jugerez appropriés. En particulier, y a-t-il des arguments, théoriques ou pratiques, qui vous semblent pouvoir être mis en avant en faveur d'une inversion préalable des observations satellitaires ?

Corrigé. Les résultats qui précèdent sont purement mathématiques. Ils n'en ont pas moins une grande importance pratique, et ils ont conduit plusieurs services météorologiques (dont le CEPMMT et Météo-France) à assimiler directement une proportion de plus en plus grande des observations satellitaires. Maintenant, l'assimilation directe des observations satellitaires nécessite l'utilisation, dans le processus d'assimilation lui-même, de l'opérateur d'observation H (et de son adjoint dans le cas d'une assimilation variationnelle). Toutes les compétences ne peuvent pas être partout, et un service météorologique dont les moyens sont limités pourra préférer utiliser des observations inversées au préalable par une équipe ou un service qualifié.

C. Covariances et corrélations des champs analysés

On considère un champ scalaire aléatoire $\phi(\xi)$, prenant ses valeurs sur un domaine spatial D, décrit par une coordonnée ξ (multidimensionnelle dans le cas le plus général). Le champ $\phi(\xi)$ est supposé nul en moyenne statistique en tout point ξ, et l'on note $C(\xi, \xi')$ la fonction de covariance de ϕ entre les points ξ et ξ' $[C(\xi, \xi') = E[\phi(\xi)\, \phi(\xi')]]$.

1. Une observation de la forme :

$$y = \phi(\xi_1) + \varepsilon \tag{1}$$

est effectuée en un point ξ_1 de D. Dans cette expression, ε est une erreur centrée, de variance s. On estime le champ $\phi(\xi)$, en tout point ξ de D, par 'interpolation optimale' à partir de y. On notera $\phi^a(\xi)$ la valeur ainsi estimée au point ξ.

Donner l'expression

a. De la valeur estimée $\phi^a(\xi)$

b. De la variance de l'erreur d'estimation correspondante (par anticipation sur la question suivante, on notera cette variance $C^a(\xi, \xi)$).

c. De la fonction de covariance $C^a(\xi, \xi')$ de l'erreur d'estimation entre les points ξ et ξ'.

Corrigé.

a. Le calcul a été effectué explicitement dans le cours à partir de la formule générale d'Interpolation Optimale donnée sur la diapositive 5.3 (qui est aussi l'équation 1a du formulaire). Le résultat est

$$\phi^a(\xi) = C(\xi, \xi_1)\, y\, /[C(\xi_1, \xi_1) + s]$$

b. Le résultat peut être obtenu, soit en calculant l'erreur d'estimation $\phi(\xi) - \phi^a(\xi)$ à partir de la formule précédente, puis en prenant la variance de l'expression ainsi obtenue, soit en utilisant directement la dernière formule de la diapositive 5.3 du cours. On trouve

$$C^a(\xi, \xi) = C(\xi, \xi) - [C(\xi, \xi_1)]^2 \,/\, [C(\xi_1, \xi_1) + s] \tag{2}$$

c. Le résultat peut être obtenu, soit en calculant la moyenne statistique du produit $[\phi(\xi) - \phi^a(\xi)]\, [\phi(\xi') - \phi^a(\xi')]$, soit en utilisant la formule (4) de la diapositive 5.14 du cours. On obtient

$$C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}') = C(\underline{\xi}, \underline{\xi}') - C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1)\, C(\underline{\xi}', \underline{\xi}_1) / [C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) + s] \qquad (3)$$

2. Montrer que la corrélation de l'erreur d'estimation entre le point d'observation $\underline{\xi}_1$ et un point quelconque $\underline{\xi}$ est inférieure en module à la corrélation du champ ϕ entre ces deux points. Montrer que cette corrélation tend vers 0 quand l'erreur d'observation s tend elle-même vers 0.

Corrigé. La formule (3) ci-dessus montre que pour tout $\underline{\xi}$

$$C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) = s\, C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) / [C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) + s]$$

La fonction de covariance *a posteriori* $C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1)$ est obtenue à partir de la fonction *a priori* par multiplication par la constante $\alpha = s / [C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) + s]$. En particulier $C^a(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) = \alpha\, C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1)$.

Par ailleurs, la formule (2) s'écrit sous la forme

$$C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}) = C(\underline{\xi}, \underline{\xi})\, \{1 - C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1)]^2 / C(\underline{\xi}, \underline{\xi})\, [C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) + s]\}$$

soit, en utilisant l'inégalité de Schwarz $C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1)]^2 \leq C(\underline{\xi}, \underline{\xi})\ \ C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1)$

$$C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}) \geq C(\underline{\xi}, \underline{\xi})\, \{1 - C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) / [C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1) + s]\} = \alpha\ \ C(\underline{\xi}, \underline{\xi})$$

Il en résulte pour ce qui du coefficient de corrélation $Cor^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1)$ entre les champs analysés aux points $\underline{\xi}$ et $\underline{\xi}_1$

$$\begin{aligned} Cor^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) &= C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) / [C^a(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1)\, C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi})]^{1/2} = \alpha C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) / [\alpha\, C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1)\, C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi})]^{1/2} \\ &\leq C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) / [\, C(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_1)\, C(\underline{\xi}, \underline{\xi})]^{1/2} \end{aligned}$$

si $C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) > 0$, le sens de l'inégalité étant inversé si $C(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1) < 0$.

Le processus d'analyse diminue donc la corrélation des champs entre le point d'observation $\underline{\xi}_1$ et un point quelconque $\underline{\xi}$.

Quand s tend vers 0, la variance $C^a(\underline{\xi}, \underline{\xi})$, tout en décroissant, reste finie. Le coefficient α tend, lui, vers 0, et il en résulte que $Cor^a(\underline{\xi}, \underline{\xi}_1)$ tend aussi vers 0.

3. On suppose que le domaine D est la droite réelle, si bien que la coordonnée $\underline{\xi}$ se réduit à un scalaire ξ. On suppose en outre que la fonction de covariance du champ ϕ est $C(\xi, \xi') = A\exp[-(\xi-\xi')^2/(2a^2)]$, où A et a sont des constantes. Représenter les variations de $\phi^a(\xi)$, de la variance d'erreur d'estimation $C^a(\xi, \xi)$ et (dans le plan (ξ, ξ')) de la fonction de covariance $C^a(\xi, \xi')$ (on posera commodément $s = A\gamma$). On représentera aussi les variations de la fonction de corrélation correspondant à $C^a(\xi, \xi')$. Faites tous commentaires que vous jugerez appropriés.

Corrigé. On obtient d'abord

$$\phi^a(\xi) = y \exp[-(\xi-\xi_1)^2/(2a^2)] / [1+\gamma]$$

Le champ estimé varie donc spatialement comme une 'gaussienne' de largeur caractéristique a, centrée sur le point d'observation ξ_1.

Puis

$$C^a(\xi, \xi) = [A/(1+\gamma)]\ \{1+\gamma - \exp[-(\xi-\xi_1)^2/a^2]\}$$

La variance d'erreur d'estimation est minimale au point d'observation, où elle est égale à $A\gamma/(1+\gamma)$, et maximale à l'infini, où elle est égale à A. Elle varie entre les deux comme une 'gaussienne' d'échelle caractéristique $a/\sqrt{2}$.

Puis ensuite

$$C^a(\xi, \xi') = [A/(1+\gamma)]\ \{(1+\gamma) \exp[-(\xi-\xi')^2/(2a^2)]\ - \exp[-(\xi- \xi_1)^2/(2a^2)] \exp[-(\xi'- \xi_1)^2/(2a^2)]\}$$