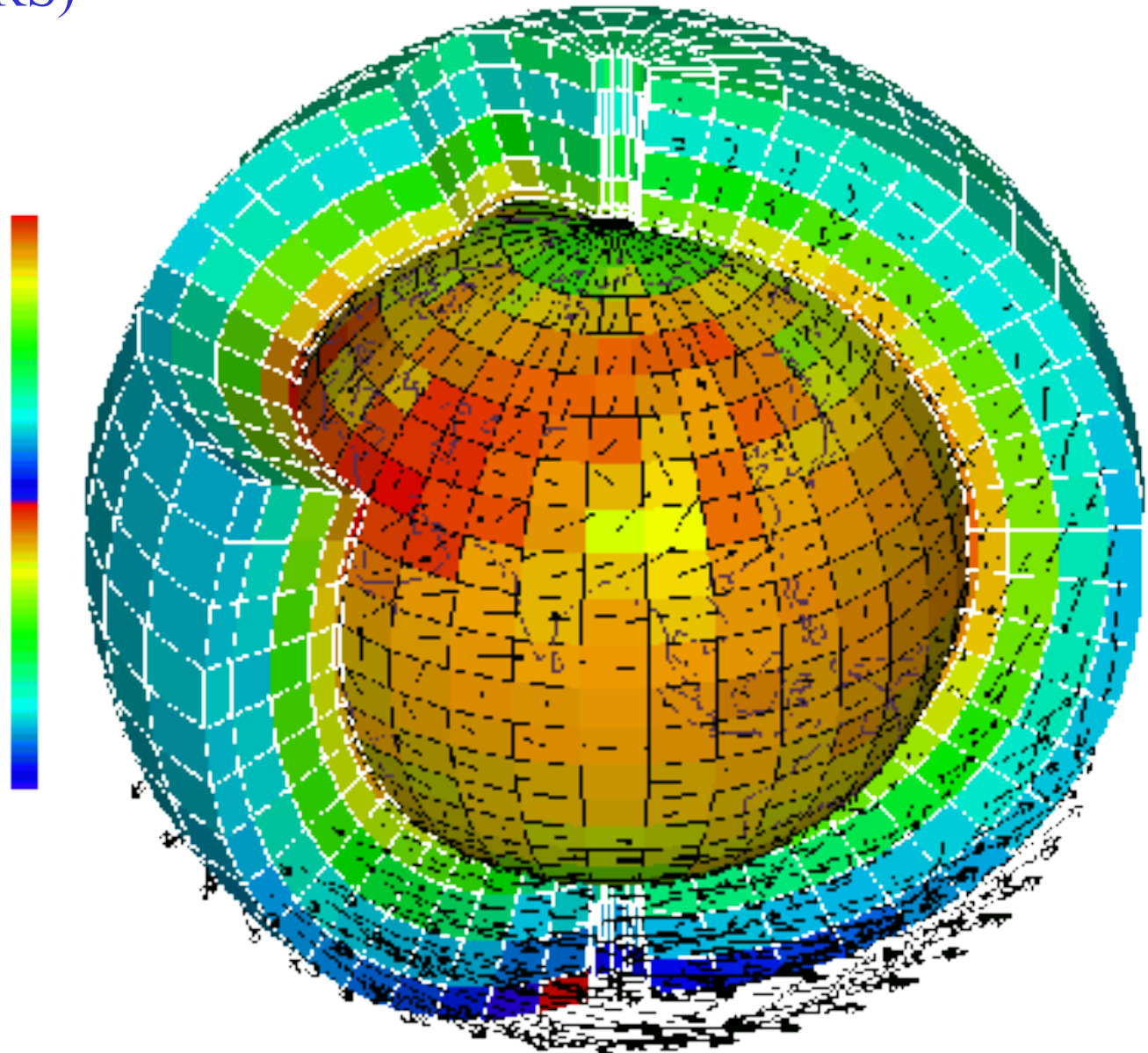


École Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Île-de-France
Année Universitaire 2011-2012

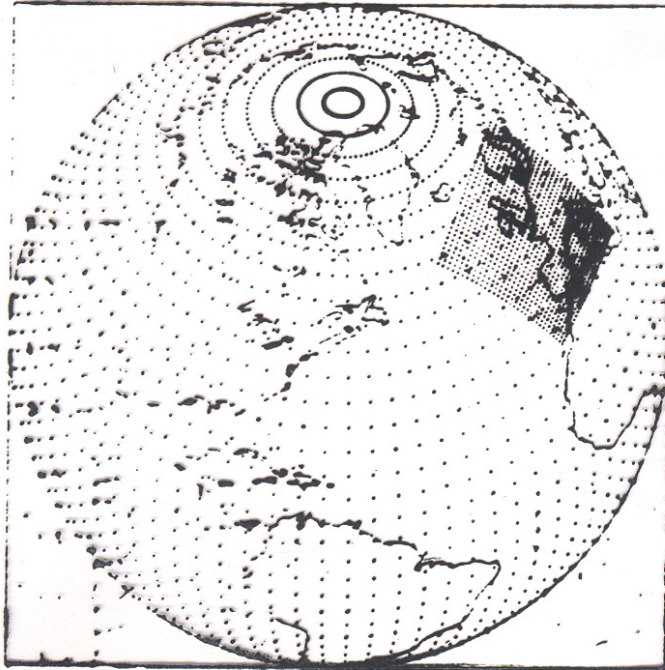
Modélisation Numérique
de l'Écoulement Atmosphérique
et Assimilation de Données

Olivier Talagrand
Cours 2
5 Mars 2012

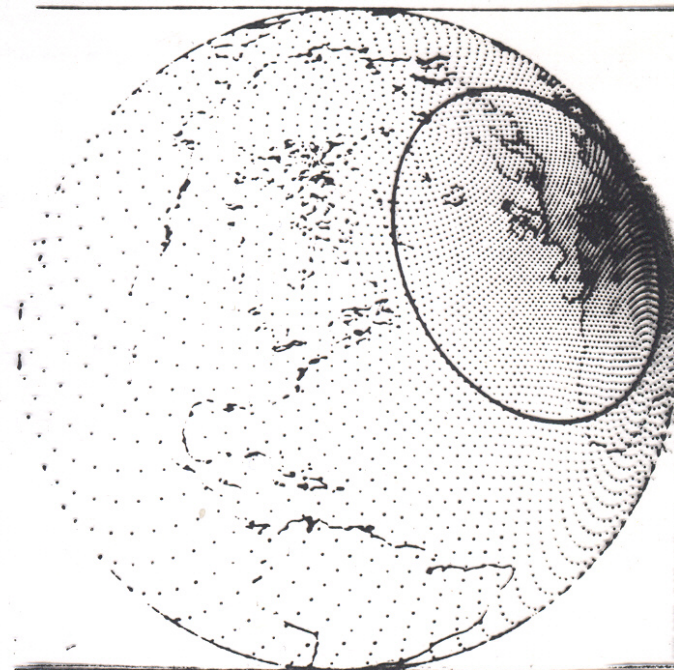
A schematic of an Atmospheric General Circulation Model (L. Fairhead /LMD-CNRS)



Grille Emerald-Péridot



Grille Arpège



Grilles de modèles de Météo-France (*La Météorologie*)

Modèles (semi-)spectraux

$$T(\mu=\sin(\text{latitude}), \lambda=\text{longitude}) = \sum_{\substack{0 \leq n < \infty \\ -n \leq m \leq n}} T_n^m Y_n^m(\mu, \lambda)$$

où les $Y_n^m(\mu, \lambda)$ sont les *harmoniques sphériques*

$$Y_n^m(\mu, \lambda) \propto P_n^m(\mu) \exp(im\lambda)$$

$P_n^m(\mu)$ est la *fonction de Legendre* de deuxième espèce.

$$P_n^m(\mu) \propto (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n$$

n et m sont respectivement le *degré* et l'*ordre* de l'harmonique $Y_n^m(\mu, \lambda)$

Modèles (semi-)spectraux

Les harmoniques sphériques définissent une base complète orthonormée de l'espace L^2 à la surface S de la sphère.

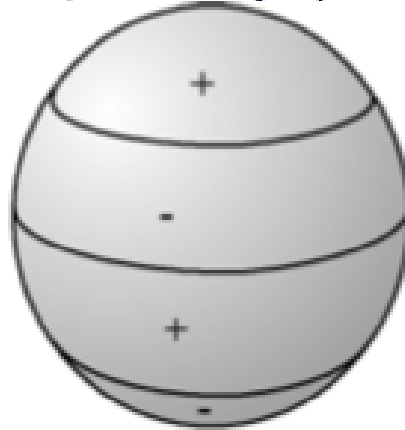
$$\int_S Y_n^m Y_{n'}^{m'} d\mu d\lambda = \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}$$

Relation de Parseval

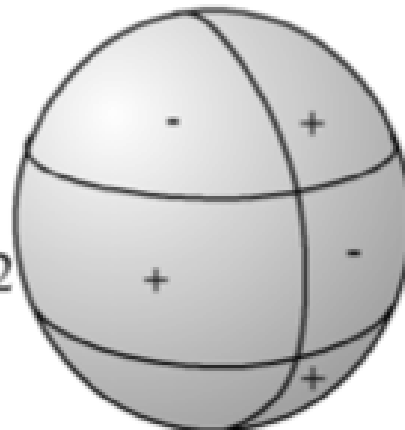
$$\int_S T^2(\mu, \lambda) d\mu d\lambda = \sum_{\substack{0 \leq n < \infty \\ -n \leq m \leq n}} |T_n^m|^2$$

Глоб. функции, их две степени

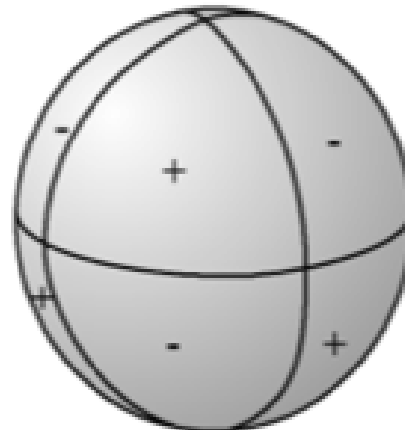
$$l = 3$$
$$m = 0$$
$$l - m = 3$$



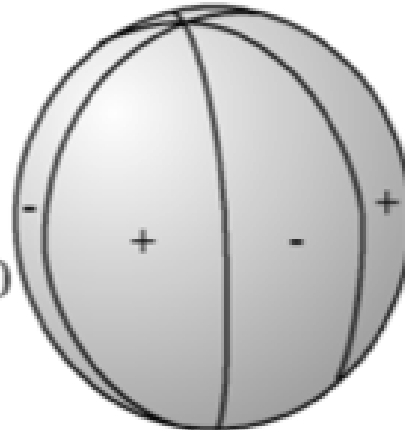
$$l = 3$$
$$m = 1$$
$$l - m = 2$$



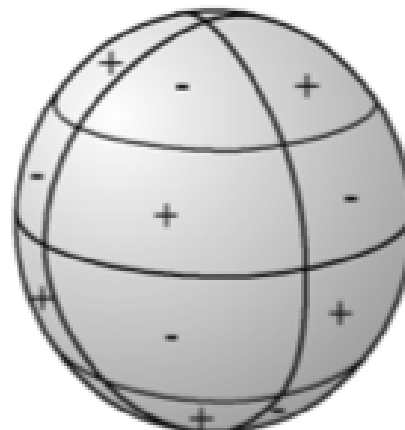
$$l = 3$$
$$m = 2$$
$$l - m = 1$$



$$l = 3$$
$$m = 3$$
$$l - m = 0$$



$$l = 5$$
$$m = 2$$
$$l - m = 3$$



Les harmoniques sphériques sont fonctions propres du laplacien à la surface de la sphère

$$\Delta Y_n^m = -n(n+1)Y_n^m$$

Troncature ‘triangulaire’ TN ($n \leq N, -n \leq m \leq n$) indépendante du choix d’un axe polaire. Représentation est parfaitement homogène à la surface de la sphère

Calculs non linéaires effectués dans l’espace physique (sur grille latitude-longitude ‘gaussienne’).

Lois physiques régissant l'écoulement

- Conservation de la masse

$$D\rho/Dt + \rho \operatorname{div}\underline{U} = 0$$

- Conservation de l'énergie

$$De/Dt - (p/\rho^2) D\rho/Dt = Q$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$D\underline{U}/Dt + (1/\rho) \underline{\operatorname{grad}}p - \underline{g} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} = \underline{F}$$

- Equation d'état

$$f(p, \rho, e) = 0 \qquad (p/\rho = rT, e = C_v T)$$

- Conservation de la masse de composants secondaires (eau pour l'atmosphère, sel pour l'océan, ...)

$$Dq/Dt + q \operatorname{div}\underline{U} = S$$