

Cours
*Modélisation Numérique de l'Écoulement Atmosphérique
et Assimilation d'Observations*
(Olivier Talagrand, mars-juin 2016)

Formulaire Récapitulatif

La notation $E(\cdot)$ désigne une moyenne statistique. L'indice supérieur T désigne la transposition. Pour toute quantité aléatoire u (scalaire ou vecteur), u' désigne la quantité aléatoire centrée correspondante : $u' \equiv u - E(u)$. La matrice de covariance $E(\underline{x}'\underline{y}'^T)$ de deux vecteurs aléatoires \underline{x} et \underline{y} est notée $C_{x'y'}$.

1. *Interpolation Optimale*. On cherche à évaluer un vecteur aléatoire \underline{x} à partir de la valeur connue d'un vecteur aléatoire \underline{y} . La fonction affine \underline{x}^a de \underline{y} qui minimise la moyenne statistique $E[(\underline{x}^a - \underline{x})^T (\underline{x}^a - \underline{x})]$ de l'erreur quadratique d'estimation est égale à :

$$\underline{x}^a = E(\underline{x}) + C_{x'y'} [C_{y'y'}]^{-1} \underline{y}' \quad (1a)$$

L'erreur d'estimation correspondante $\underline{x}^a - \underline{x}$ est nulle en moyenne statistique. Sa matrice de covariance est égale à :

$$P^a \equiv E[(\underline{x}^a - \underline{x}) (\underline{x}^a - \underline{x})^T] = C_{x'x'} - C_{x'y'} [C_{y'y'}]^{-1} C_{y'x'} \quad (1b)$$

2. *Forme générale de l'Estimation Statistique Linéaire. Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)*.

On cherche à estimer un vecteur \underline{x} , appartenant à l'espace des états, de dimension n , à partir d'un vecteur de données \underline{z} de dimension m ($m \geq n$, $m = n + p$). Le vecteur de données est de la forme :

$$\underline{z} = \Gamma \underline{x} + \underline{\zeta} \quad (2)$$

où Γ est un opérateur connu de l'espace des états dans l'espace des données, supposé de rang n , et où $\underline{\zeta}$ est une 'erreur' aléatoire centrée, de matrice de covariance connue S .

On cherche un estimé \underline{x}^a , fonction affine de \underline{z} , vérifiant les deux conditions suivantes :

a) \underline{x}^a est invariant dans un changement d'origine dans l'espace des états.

b) \underline{x}^a minimise la moyenne statistique $E[(\underline{x}^a - \underline{x})(\underline{x}^a - \underline{x})^T]$ de l'erreur quadratique d'estimation correspondante.

L'estimé ainsi défini est égal à :

$$\underline{x}^a = (\Gamma^T S^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T S^{-1} \underline{z} \quad (3a),$$

la matrice de covariance de l'erreur d'estimation correspondante étant égale à :

$$P^a \equiv E[(\underline{x}^a - \underline{x})(\underline{x}^a - \underline{x})^T] = (\Gamma^T S^{-1} \Gamma)^{-1} \quad (3b)$$

Forme variationnelle. L'estimé \underline{x}^a peut aussi être obtenu par minimisation de la fonction scalaire suivante (*fonction objective*), définie sur l'espace des états :

$$\underline{\xi} \rightarrow J(\underline{\xi}) = (1/2) (\Gamma \underline{\xi} - \underline{z})^T S^{-1} (\Gamma \underline{\xi} - \underline{z}) \quad (4)$$

L'estimé \underline{x}^a est appelé en anglais le *Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)* de \underline{x} à partir de \underline{z} . Dans le cas particulier où l'erreur $\underline{\xi}$ est gaussienne, la distribution de probabilité conditionnelle de \underline{x} connaissant \underline{z} est la distribution gaussienne de moyenne \underline{x}^a et de matrice de covariance P^a .

Sous la condition $\text{rang} \Gamma = n$, le vecteur de données peut toujours être transformé en:

$$\underline{x}^b = \underline{x} + \underline{\zeta}^b \quad (5a)$$

$$\underline{y} = H\underline{x} + \underline{\varepsilon} \quad (5b)$$

$$\text{avec : } E(\underline{\zeta}^b \underline{\varepsilon}^T) = 0 \quad (6)$$

Dans les expressions ci-dessus, le vecteur \underline{x}^b , de dimension n , est l'*ébauche* du vecteur d'état à estimer, à laquelle s'ajoute le vecteur de données complémentaires \underline{y} , de dimension p .

Posant :

$$E(\underline{\zeta}^b \underline{\zeta}^{bT}) = P^b \quad (7a)$$

$$E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T) = R \quad (7b),$$

les équations (3) s'écrivent sous les deux formes équivalentes :

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^a H^T R^{-1} (\underline{y} - H\underline{x}^b) \quad (8a)$$

$$(P^a)^{-1} = (P^b)^{-1} + H^T R^{-1} H \quad (8b)$$

et :

$$\underline{x}^a = \underline{x}^b + P^b H^T (H P^b H^T + R)^{-1} (\underline{y} - H \underline{x}^b) \quad (9a)$$

$$P^a = P^b - P^b H^T (H P^b H^T + R)^{-1} H P^b \quad (9b)$$

Dans les équations (8a) et (9a), l'estimé \underline{x}^a est décomposé en la somme de l'ébauche \underline{x}^b et d'une correction proportionnelle au *vecteur innovation* $\underline{y} - H \underline{x}^b$.

Dans la décomposition (5), la fonction objective (4) devient :

$$\underline{\xi} \rightarrow J(\underline{\xi}) = (1/2) (\underline{\xi} - \underline{x}^b)^T (P^b)^{-1} (\underline{\xi} - \underline{x}^b) + (1/2) (H \underline{\xi} - \underline{y})^T R^{-1} (H \underline{\xi} - \underline{y}) \quad (10)$$

3. Système évolutif dans le temps. Filtre de Kalman.

On suppose maintenant que le système observé évolue au cours du temps, suivant la loi :

$$\underline{x}_{k+1} = M_k \underline{x}_k + \underline{\eta}_k \quad (11)$$

où \underline{x}_k est l'état du système à l'instant k ($\dim \underline{x}_k = n$), M_k est une matrice connue, et $\underline{\eta}_k$ est l'*erreur modèle*, aléatoire, décorrélée dans le temps de covariance connue Q_k à l'instant k .

On dispose aux instants $k = 0, 1, 2, \dots$ d'observations de la forme

$$\underline{y}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{\varepsilon}_k \quad (12)$$

où H_k est une matrice connue, et $\underline{\varepsilon}_k$ une erreur d'observation aléatoire, décorrélée dans le temps, de covariance connue R_k à l'instant k . On dispose en outre d'une ébauche à l'instant $k = 0$, de la forme

$$\underline{x}_0^b = \underline{x}_0 + \underline{\zeta}_0^b \quad (13)$$

où l'erreur $\underline{\zeta}_0^b$ est de covariance P_0^b . On suppose enfin que les erreurs $\underline{\eta}_k$, $\underline{\varepsilon}_k$, et $\underline{\zeta}_0^b$ sont mutuellement décorrélées.

Le *filtre de Kalman* est défini par l'algorithme récursif suivant, initialisé à partir de $(\underline{x}_0^b, P_0^b)$:

Analyse à l'instant k :

$$\underline{x}_k^a = \underline{x}_k^b + P_k^b H_k^T (H_k P_k^b H_k^T + R_k)^{-1} (\underline{y}_k - H_k \underline{x}_k^b) \quad (14a)$$

$$P_k^a = P_k^b - P_k^b H_k^T (H_k P_k^b H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^b \quad (14b)$$

Évolution temporelle entre les instants k et $k+1$:

$$\underline{x}_{k+1}^b = M_k \underline{x}_k^a \quad (15a)$$

$$P_{k+1}^b = M_k P_k^a M_k^T + Q_k \quad (15b)$$

L'estimé \underline{x}_k^b (resp. \underline{x}_k^a) ainsi obtenu est le *BLUE* de l'état \underline{x}_k à l'instant k à partir de toutes les observations jusqu'à l'instant $k-1$ (resp. jusqu'à l'instant k). La matrice P_k^b (resp. P_k^a) est la matrice de covariance d'erreur correspondante.

Forme variationnelle. Nous limitant maintenant à la suite des $K+1$ instants $k = 0, 1, \dots, K$, la minimisation de la fonction objective :

$$\begin{aligned}
 & (\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_K) \rightarrow \\
 \mathcal{J}(\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_K) &= (1/2) (\underline{\xi}_0 - \underline{x}_0^b)^T [P_0^b]^{-1} (\underline{\xi}_0 - \underline{x}_0^b) + (1/2) \sum_{k=0, \dots, K} (H_k \underline{\xi}_k - \underline{y}_k)^T R_k^{-1} (H_k \underline{\xi}_k - \underline{y}_k) \\
 &+ (1/2) \sum_{k=0, \dots, K-1} (\underline{\xi}_{k+1} - M_k \underline{\xi}_k)^T Q_k^{-1} (\underline{\xi}_{k+1} - M_k \underline{\xi}_k) \quad (16)
 \end{aligned}$$

où les $\underline{\xi}_k$ ($k=0, \dots, K$) appartiennent à l'espace des états du système, définit la suite des *BLUE* des \underline{x}_k à partir de toutes les données (11-13). En particulier, l'état ainsi obtenu à l'instant final K est identique à l'estimé \underline{x}_N^a produit par le filtre de Kalman (14-15).