

Ondes atmosphériques et océaniques. Instabilités.

V. Zeitlin

Laboratoire de Météorologie Dynamique

Course ondes M1 OACOS

Plan

Notions et approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin -Helmholtz

Ondes de Rossby et instabilité barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby et instabilité barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby baroclines

Instabilité barocline

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Equation d'onde la plus simple

Exemple classique de l'équation d'onde:

$$u_t + cu_x = 0. \quad (1)$$

$u(x, t)$ - variable dynamique, définie pour tout x :

$-\infty < x < +\infty$, et $t: 0 \leq t < \infty$, $c = \text{const.}$

Notation: $(\dots)_x = \frac{\partial(\dots)}{\partial x}$, $(\dots)_t = \frac{\partial(\dots)}{\partial t}$

Méthode de solution 1: changement de variables.

$$(x, t) \rightarrow (\xi_+, \xi_-) = (x + ct, x - ct). \quad (2)$$

$$\frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial t} = \pm c \Rightarrow \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_+} - \frac{\partial u}{\partial \xi_-} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi_+} + \frac{\partial u}{\partial \xi_-} \quad (5)$$

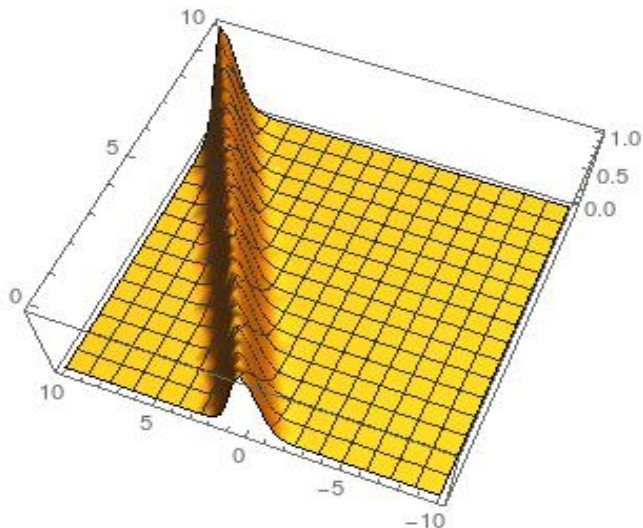
Simplification de l'équation

$$u_t + cu_x = 0 \rightarrow 2c \frac{\partial u}{\partial \xi_+} = 0 \Rightarrow u = u(\xi_-). \quad (6)$$

Fonction u déterminée à partir des conditions initiales:

$$\text{c.l. : } u_{t=0} = u_0(x) \Rightarrow u = u_0(x - ct). \quad (7)$$

Évolution spatio-temporelle de la perturbation initiale localisée donnée par (1)



Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Méthode de Fourier

Méthode de solution 2 - transformation de Fourier:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk d\omega e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}(k, \omega) + c.c.. \quad (8)$$

Transformation inverse:

$$\hat{u}(k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int dx dt e^{-i(kx - \omega t)} u(x, t) + c.c.. \quad (9)$$

Transformation directe \times Transformation inverse = **1**, car

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x - x'), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} = \delta(t - t'), \quad (10)$$

δ - fonction delta de Dirac.

Modes de Fourier: $\hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \leftrightarrow$ ondes monochromatiques. Amplitude: $|\hat{u}|$; Phase:

$$\Phi = kx - \omega t + \Phi_0, \quad \hat{u} = |\hat{u}| e^{i\Phi}.$$

Principe de superposition

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Méthode de Fourier \Leftrightarrow principe de superposition, valable pour les systèmes linéaires.

$$u_t + cu_x = 0 \Rightarrow i(kc - \omega) \hat{u}(k, \omega), \hat{u}(k, \omega) \neq 0 \Rightarrow \quad (11)$$

$$\omega = ck, \text{ relation de dispersion.} \quad (12)$$

Solution générale:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-ct)} \hat{u}(k) + c.c. \quad (13)$$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Vitesse de phase

Vitesse de propagation de la phase d'une onde monochromatique: **vitesse de phase**:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k}. \quad (14)$$

Dispersion: dépendance $c = c(k) \Rightarrow$ onde simple est non-dispersive: $c_{ph} = c = \text{const.}$

Vitesse de groupe:

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (15)$$

- vitesse de propagation des modulations = vitesse de propagation de l'information.

Onde simple: $c_{ph} = c_g$ (comme les ondes sonores ou électromagnétiques).

Modifications de l'équation de l'onde simple

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Double sens de propagation

$$u_t + cu_x = 0 \rightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2, c = \pm c. \quad (16)$$

Remarque: pour fixer les c.i. il faut non seulement $u(x, 0)$, mais aussi $u_x(x, 0)$.

Sens unique de propagation + dispersion

$$u_t + cu_x = 0 \rightarrow u_t + cu_x + \alpha u_{xxx} = 0 \quad \alpha = \text{const} \quad (17)$$

Ondes dans les canaux peu profonds. (Dérivées impaires pour respecter la symétrie de l'équation initiale par rapport aux réflexions.) Dispersion: $\omega = ck - \alpha k^3$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

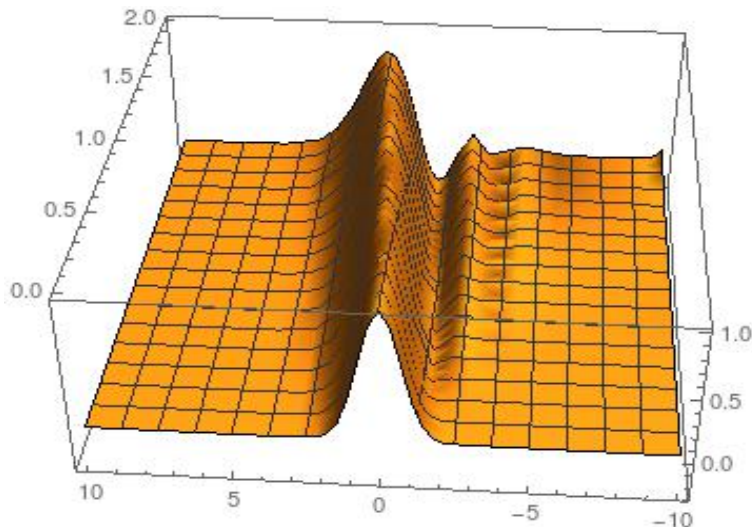
Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Évolution spatio-temporelle de la perturbation initiale localisée suivant (17)



Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Non-linéarité

$$u_t + cu_x = 0 \rightarrow u_t + uu_x + cu_x = 0 \Rightarrow \quad (18)$$

plus de principe de superposition!

Idée qualitative de **déferlement**: $c \rightarrow c + u \Rightarrow$ plus grand est l'amplitude plus grand est la vitesse: une bosse "dépasse" les parties voisines.

Équation Korteweg - deVries

Dispersion + non-linéarité:

$$u_t + cu_x = 0 \rightarrow u_t + uu_x + cu_x + \alpha u_{xxx} = 0 \quad (19)$$

Solitons.

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Équations primitives hydrostatiques

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

$$\frac{du}{dt} - fv + \phi_x = 0, \quad (20)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \phi_y = 0, \quad (21)$$

$$-g \frac{\rho}{\rho_0} + \phi_z = 0, \quad (22)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (24)$$

Ici $\frac{d}{dt} = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$, $\rho = \rho_s(z) + \sigma(x, y, z, t)$ et ρ_0 - parties variable et constante de la densité, $\rho_0 \gg \rho$, et $\phi = \frac{P}{\rho_0}$ - géopotentiel.

Equations primitives linéarisées

Reécriture des équations hydrostatique et de densité en termes d'une nouvelle variable (flottaison):

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\sigma}{dt} + w\rho'_s(z) = 0 \leftrightarrow \frac{db}{dt} + wg\frac{\rho'}{\rho_0} = 0, \quad (25)$$

où $b = g\frac{\sigma}{\rho_0}$ et, par conséquent, $\phi_z = -b$. $-g\frac{\rho'}{\rho_0} = N^2$, N - fréquence de Brunt - Vais'al'a locale. Dans la suite N est supposée constante.

Equations primitives sur le plan f linéarisées:

$$u_t - fv = -\phi_x, \quad (26)$$

$$v_t + fu = -\phi_y, \quad (27)$$

$$b = -\phi_z, \quad (28)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (29)$$

$$b_t - N^2w = 0. \quad (30)$$

Simplification des équations linéarisées

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Élimination de b et de $w = -\frac{\phi_{zt}}{N^2}$:

$$u_t - fv = -\phi_x, \quad (31)$$

$$v_t + fu = -\phi_y, \quad (32)$$

$$u_x + v_y - \frac{\phi_{zzt}}{N^2} = 0. \quad (33)$$

Système de 3 équations pour 3 variables.

Ondes internes, relations de dispersion et de polarisation

Solution-onde:

$$(u, v, \phi) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\phi}) e^{i(kx+ly+mw-\omega t)} + \text{c.c.} \quad (34)$$

Relation de dispersion:

$$\omega \left[\omega^2 - \left(N^2 \frac{k^2 + l^2}{m^2} + f^2 \right) \right] = 0 \quad (35)$$

Ondes propagatives:

$$\omega^2 = \left(N^2 \frac{k^2 + l^2}{m^2} + f^2 \right) \quad (36)$$

Relations de polarisation:

$$\hat{u} = \frac{\omega k + i l f}{\omega^2 - f^2} \hat{\phi} \quad (37)$$

$$\hat{v} = \frac{\omega l - i k f}{\omega^2 - f^2} \hat{\phi} \quad (38)$$

Au-delà de l'hydrostatisme

Equations non-hydrostatiques:

$$g \frac{\rho}{\rho_0} = -\phi_z \rightarrow \frac{dw}{dt} + g \frac{\rho}{\rho_0} = -\phi_z. \quad (39)$$

Elimination de b et de w :

$$b = -\phi_z - w_t, \quad -(\partial_{tt} + N^2)(u_x + v_y) + \phi_{zzt} = 0 \Rightarrow (40)$$

$$u_t - fv = -\phi_x, \quad (41)$$

$$v_t + fu = -\phi_y, \quad (42)$$

$$(\partial_{tt} + N^2)(u_x + v_y) - \phi_{zzt} = 0, \quad (43)$$

Relation de dispersion:

$$\omega \left[\omega^2 - \left(N^2 \frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + m^2} + f^2 \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2} \right) \right] = 0 \quad (44)$$

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby

baroclines

Instabilité barocline

Relation de dispersion générale pour les ondes internes

Solution $\omega = 0 \leftrightarrow$ conservation de la **vorticité potentielle**
Ondes propagatives:

$$\omega^2 = N^2 \frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + m^2} + f^2 \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2} \quad (45)$$

Stratification typique dans l'océan/atmosphère:

$$N^2 > f^2 \Rightarrow f^2 \leq \omega^2 \leq N^2 \quad (46)$$

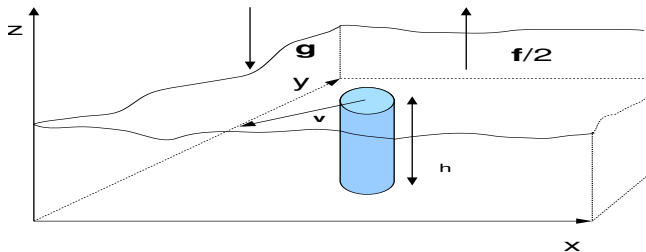
Exercice:

- ▶ Dédurre les relation de polarisation pour les ondes internes non-hydrostatiques
- ▶ Trouver la solution correspondant à la racine $\omega = 0$ dans (44)

Modèle de l'eau peu profonde en rotation (Saint-Venant ou RSW)

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v} + g \nabla h = 0, \quad (47)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (\mathbf{v}h) = 0, \quad (48)$$



Conservation de la vorticité potentielle

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Vorticité potentielle:

Construite de **vorticité relative** (vorticité verticale)

$\zeta = v_x - u_y$, le paramètre de Coriolis f , et la profondeur du fluide h .

$$q = \frac{\zeta + f}{h}. \quad (49)$$

$\zeta + f$ -**vorticité absolue**, f - **vorticité planétaire**.

Exercice:

Expliquer pourquoi f représente la vorticité planétaire.

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Conservation Lagrangienne:

$$\frac{dq}{dt} \equiv (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) q = 0, \quad (50)$$

s'obtient en combinant les équations de vorticité:

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} + (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (51)$$

et de continuité

$$\frac{dh}{dt} + h \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 : \quad (52)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\zeta + f}{h} = \frac{1}{h} \frac{d}{dt} (\zeta + f) - \frac{\zeta + f}{h^2} \frac{d}{dt} h = 0, \quad (53)$$

Exercice:

Démontrer (51)

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équations linéarisées:

Perturbations autour de l'état de repôts:

$$\mathbf{v} = 0, \quad h = H_0 = \text{const.}$$

Les équations linéarisées en approximation

$$f = f_0 = \text{const.}$$

$$\begin{aligned}u_t - fv + g\eta_x &= 0, \\v_t + fu + g\eta_y &= 0, \\ \eta_t + H_0(u_x + v_y) &= 0,\end{aligned} \tag{54}$$

où u , v - deux composantes de perturbation de vitesse, η - perturbation de l'interface.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Méthode de Fourier

Solutions - ondes harmoniques:

$$(u, v, \eta) = (u_0, v_0, \eta_0) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (55)$$

où ω et \mathbf{k} sont fréquence (pulsation) et nombre d'onde, respectivement.

Système algébrique pour (u_0, v_0, η_0) :

$$\begin{pmatrix} i\omega & -f & -igk_x \\ f & i\omega & -igk_y \\ -iH_0k_x & -iH_0k_y & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (56)$$

Exercice:

Démontrer (56)

Notions et
approches de baseEquation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravitéOndes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profondInstabilité Kelvin
-HeimholtzOndes de Rossby
et instabilité
barotropeModèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotropeOndes de Rossby
et instabilité
baroclineModèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équation de dispersion

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Condition de solvabilité:

$$\det \begin{pmatrix} i\omega & -f & -igk_x \\ f & i\omega & -igk_y \\ -iH_0k_x & -iH_0k_y & i\omega \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \quad (57)$$

$$\omega \left(\omega^2 - gH_0\mathbf{k}^2 - f^2 \right) = 0. \quad (58)$$

Sens physique des solutions

Les trois racines de cette équation correspondent aux

- ▶ Solutions stationnaires $\omega = 0$
- ▶ Ondes propagatives avec la relation de dispersion:

$$\omega^2 - gH_0\mathbf{k}^2 - f^2 = 0 \quad (59)$$

- ondes d'inertie-gravité.

En absence de rotation:

$$\omega^2 - gH_0\mathbf{k}^2 = 0 \quad (60)$$

Exercice:

Déterminer les relations de polarisation pour les ondes d'inertie-gravité.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

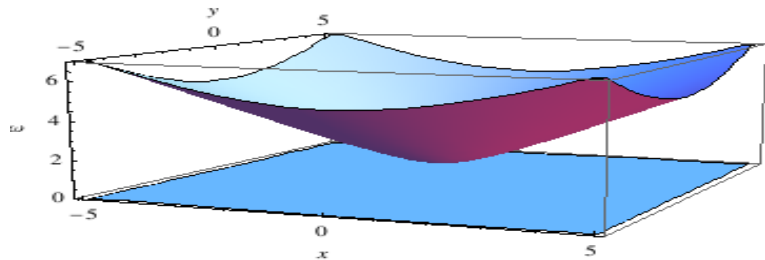
Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Relation de dispersion



Relation de dispersion pour les ondes d'inertie-gravité.
 $c = \sqrt{gH_0} = 1$, $f = 1$, la partie à $\omega < 0$ n'est pas tracée.
Solution $\omega = 0$ est aussi représentée pour exhiber le **trou spectral**.

Profondeur infinie: équations de mouvement

Mouvements bi-dimensionnels (pas de dépendance de y)
du fluide incompressible à $\rho_0 = \text{const}$ sans rotation:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P_x}{\rho_0} \quad (61)$$

$$\frac{dw}{dt} + g = -\frac{P_z}{\rho_0}, \quad (62)$$

$$u_x + w_z = 0. \quad (63)$$

Ici $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$

Conditions sur la surface libre située à $z = \eta(x, t)$:

- ▶ Condition **cinématique**: $\eta_t + u\eta_x = w(\eta)$,
- ▶ Condition **dynamique**: $P(\eta) = P_0$, $P_0 = \text{const}$ - pression au-dessus de la surface.
- ▶ Condition dans la profondeur ($z \rightarrow -\infty$):
décroissance des perturbations

Etat de repos: **équilibre hydrostatique**

$$P = P(z) = -\rho_0 g z + P_0.$$

Equations linéarisées et leurs solutions

Perturbations - ondes de la vitesse verticale, pression et de η :

$$w = \hat{w}(z)e^{i(kx - \omega t)} + c.c., \quad p = \hat{p}(z)e^{i(kx - \omega t)} + c.c., \quad \eta = \hat{\eta}e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (64)$$

$$u_t = -\frac{p_x}{\rho_0} \quad (65)$$

$$w_t = -\frac{p_z}{\rho_0}, \quad (66)$$

$$u_x + w_z = 0. \quad (67)$$

Elimination de u, w :

$$p_{xx} + p_{zz} = 0, \Rightarrow \hat{p}''(z) - k^2\hat{p}(z) = 0. \quad (68)$$

Condition de décroissance en $z \rightarrow -\infty \Rightarrow \hat{p}(z) = \hat{p}_0 e^{kz}$.

Condition dynamique à la surface linéarisée:

$$-\rho_0 g \hat{\eta} + \hat{p}_0 = 0 \quad (69)$$

Relation entre $\hat{\omega}$ et \hat{p} à $z = 0$: $-\omega \hat{w} = -\frac{k}{\rho_0} \hat{p}_0 = -gk \hat{\eta}$

Condition cinématique linéarisée: $-i\omega \hat{\eta} = \hat{w} \Rightarrow$ relation
de dispersion:

$$\omega^2 = gk. \quad (70)$$

Exercice:

Déterminer les relations de polarisation pour les ondes surfaciques.

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Profondeur finie

Condition de décroissance \rightarrow condition de non-pénétration au fond: $w(-H) = 0$, où H - profondeur du fluide. Pour les solutions-ondes ceci signifie que $P_z(-H) = 0$. Les équations sont les mêmes, la solution pour $\hat{p}(z)$ avec la c.l. modifiée devient

$$\hat{p}(z) = Ae^{kH} \left(e^{k(z-H)} + e^{-k(z-H)} \right), \quad (71)$$

où A - amplitude à déterminer à partir de la condition de continuité de pression. La procédure alors suit le cas précédent et donne la relation de dispersion:

$$\omega^2 = gk \tanh kH. \quad (72)$$

Exercice:

Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de la houle.

Système bi-fluide avec interface

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Modèle:

Équations d'Euler **non-hydrostatiques** pour deux couches
du fluide incompressible à $\rho_i = \text{const}$, $i = 1, 2$ sans
rotation dans un plan vertical x, z .

Équations de mouvement:

$$\begin{aligned}u_t^{(i)} + u^{(i)} u_x^{(i)} + w^{(i)} u_z^{(i)} &= -\frac{1}{\rho_i} P_x^{(i)}, \\w_t^{(i)} + u^{(i)} w_x^{(i)} + w^{(i)} w_z^{(i)} + g &= -\frac{1}{\rho_i} P_z^{(i)}, \\u_x^{(i)} + w_z^{(i)} &= 0.\end{aligned}\tag{73}$$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Conditions sur l'interface:

- ▶ Dynamique:

$$P^{(1)} \Big|_{z=\eta} = P^{(2)} \Big|_{z=\eta}, \quad (74)$$

- ▶ Cinématique:

$$\eta + u^{(i)} \eta_x = w^{(i)} \Big|_{z=\eta}, \quad i = 1, 2. \quad (75)$$

où $\eta(x, t)$ - position de l'interface entre les couches 1 (supérieure) et 2 (inférieure).

Solution stationnaire: écoulement cisailé

$$w^{(i)} = 0; \quad u^{(i)} = U_i = \text{const}; \quad \eta = 0; \quad P_z^{(i)} = -g\rho_i, \quad i = 1, 2. \quad (76)$$

Notions et
approches de baseEquation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravitéOndes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profondInstabilité Kelvin
-HelmholtzOndes de Rossby
et instabilité
barotropeModèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotropeOndes de Rossby
et instabilité
baroclineModèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équations linéarisées pour les petites perturbations:

- ▶ Équations:

$$u_t^{(i)} + U_i u_x^{(i)} = -\frac{1}{\rho_i} p_x^{(i)},$$

$$w_t^{(i)} + U_i w_x^{(i)} = -\frac{1}{\rho_i} p_z^{(i)},$$

$$u_x^{(i)} + w_z^{(i)} = 0 \Rightarrow \nabla^2 p^{(i)} = 0. \quad (77)$$

- ▶ Conditions aux limites:

$$p^{(1)} \Big|_{z=0} - p^{(2)} \Big|_{z=0} = g(\rho_1 - \rho_2)\eta. \quad (78)$$

Ondes sur l'interface $\Rightarrow \eta = \bar{\eta} e^{i(kx - \omega t)}$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-HelmholtzOndes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Solution de l'équation de Laplace pour la pression:

$$p^{(1)} = \bar{p}_1 e^{-kz} e^{i(kx - \omega t)}, \quad p^{(2)} = \bar{p}_2 e^{+kz} e^{i(kx - \omega t)} \quad (79)$$

Séparation des variables pour $w^{(i)}$:

$$w^{(i)} = \bar{w}_i(z) e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow \quad (80)$$

$$\bar{w}_1 = -i \frac{k \bar{p}_1 e^{-kz}}{\rho_1 (kU_1 - \omega)}, \quad \bar{w}_2 = i \frac{k \bar{p}_2 e^{kz}}{\rho_2 (kU_2 - \omega)}. \quad (81)$$

C.I. cinématique:

$$\eta = \bar{\eta} e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow -i(\omega - kU_i) \bar{\eta} = \bar{w}_i|_{z=0}, \Rightarrow \quad (82)$$

$$\bar{p}_1 = -\frac{\bar{\eta}}{k} \rho_1 (\omega - kU_1)^2, \quad \bar{p}_2 = +\frac{\bar{\eta}}{k} \rho_2 (\omega - kU_2)^2 \quad (83)$$

C.I. dynamique:

$$\rho_2(\omega - kU_2)^2 + \rho_1(\omega - kU_1)^2 = kg(\rho_2 - \rho_1) \equiv kg\Delta\rho, \quad \Delta\rho > 0. \Rightarrow \quad (84)$$

Relation de dispersion:

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2k(U_1\rho_1 + U_2\rho_2)\omega + \left[k^2(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2) - kg\Delta\rho \right] = 0. \quad (85)$$

Solution dans un repère $U_2 = 0, U_1 = U$:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{U\rho_1 \pm \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)\frac{g\Delta\rho}{k} - \rho_1\rho_2 U^2}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (86)$$

Notions et
approches de baseEquation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravitéOndes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Onde peu profond
Onde profondInstabilité Kelvin
-HelmholtzOndes de Rossby
et instabilité
barotropeModèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotropeOndes de Rossby
et instabilité
baroclineModèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Instabilité des ondes courtes:

$$k > \frac{g\Delta\rho}{U^2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (87)$$

Taux de croissance: $\Im(\omega)$

Instabilité de cisaillement:

Cas particulier $g = 0$:

$$c = \frac{\omega}{k} = U \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} - \text{toujours instable} \quad (88)$$

Remarque: viscosité \rightarrow borne supérieure pour les k instables.

Exercice:

Déterminer le taux de croissance des ondes sur l'interface instables.

Exemple d'instabilité KH



Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équations pour la vitesse du mouvement horizontal

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + \vec{v}_h \cdot \vec{\nabla}_h \vec{v}_h + f \hat{z} \wedge \vec{v}_h = -g \vec{\nabla}_h h. \quad (89)$$

$$f = f_0(1 + \beta y), \quad H = H_0 + \eta \quad (90)$$

η - perturbation de la surface libre

Scaling pour les mouvements tourbillonnaires

- ▶ Vitesse $\vec{v}_h = (u, v)$, $u, v \sim U$
- ▶ Échelle spatiale horizontale unique L ,
- ▶ Échelle verticale $H_0 \ll L$,
- ▶ Échelle de temps: **temps de retournement** $T \sim L/U$.

Paramètres caractéristiques

Échelle intrinsèque du système: rayon de déformation de Rossby:

$$R_d = \frac{\sqrt{gH_0}}{f_0} \quad (91)$$

- ▶ Nombre de Rossby: $Ro = \frac{U}{f_0 L}$,
- ▶ Nombre de Burger: $Bu = \frac{R_d^2}{L^2}$,
- ▶ Amplitude typique des déviations de la surface libre = paramètre de non-linéarité.: $\lambda = \Delta H / H_0$, où ΔH est la valeur typique de η ,
- ▶ Gradient méridien adimensionné de f : $\tilde{\beta} \sim \beta L$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Heimholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équations RSW adimensionnées

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

$$Ro (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + (1 + \tilde{\beta} y) \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v} = -\frac{\lambda Bu}{Ro} \nabla \eta, \quad (92)$$

$$\lambda \partial_t \eta + \nabla \cdot (\mathbf{v}(1 + \lambda \eta)) = 0. \quad (93)$$

Équilibre géostrophique

Équilibre entre la force de Coriolis et la force de pression

→ **vent géostrophique**:

$$f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}_g = -g \nabla h \quad (94)$$

Approximation quasi-géostrophique

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Conditions de réalisation de l'équilibre
géostrophique:

- ▶ $Ro \rightarrow 0$,
- ▶ $\lambda Bu \sim Ro$,
- ▶ $\tilde{\beta} \rightarrow 0$.

Quasi-géostrophisme (QG):

$$Ro \equiv \epsilon \ll 1, \lambda \sim Ro, \Rightarrow Bu \sim 1, \Rightarrow L \sim R_d, \tilde{\beta} \sim Ro \quad (95)$$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Vorticité potentielle QG

Vorticité potentielle adimensionnée:

$$\begin{aligned}q &= \frac{f_0}{H_0} \frac{\epsilon(v_x - u_y) + (1 + \epsilon y)}{1 + \epsilon \eta} \\&= \frac{f_0}{H_0} (\epsilon(v_x - u_y) + (1 + \epsilon y)) (1 - \epsilon \eta + \dots) \\&= \frac{f_0}{H_0} \left[1 + \epsilon(v_x - u_y + y - \eta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]. \quad (96)\end{aligned}$$

Vent géostrophique adimensionné:

$$v = \eta_x \quad u = -\eta_y \Rightarrow v_x - u_y = \nabla^2 \eta \quad (97)$$

Advection avec le vent géostrophique:

$$\partial_t \dots + u \partial_x \dots + v \partial_y \dots \rightarrow \partial_t \dots + \mathcal{J}(\eta, \dots) \quad (98)$$

$\mathcal{J}(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ - Jacobien.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équation QG

$$\partial_t (\vec{\nabla}^2 \eta - \eta) + \mathcal{J}(\eta, \vec{\nabla}^2 \eta - \eta) + \partial_x \eta = 0. \quad (99)$$

Sens physique: **conservation de la VP géostrophique**

$q_G = \vec{\nabla}^2 \eta - \eta + y$. Restitution des dimensions:

$$\vec{\nabla}^2 \eta - \eta \rightarrow \vec{\nabla}^2 \eta - \frac{1}{R_d^2} \eta, \quad \partial_x \eta \rightarrow \beta \partial_x \eta. \quad (100)$$

Linéarisation formelle:

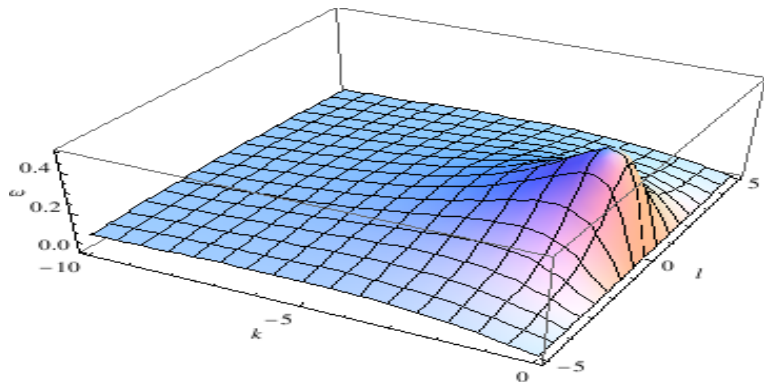
$$\partial_t \eta - \vec{\nabla}^2 \partial_t \eta - \partial_x \eta = 0. \quad (101)$$

Solutions ondes $\eta \propto \exp i(kx + ly - \omega t)$ - relation de dispersion:

$$\omega = -\frac{k}{k^2 + l^2 + 1}. \quad (102)$$

Ondes de Rossby fortement dispersives; dispersion anisotrope, **ondes de vortacité**.

Diagramme de dispersion des ondes de Rossby



Exercice:

Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes de Rossby et les analyser.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby

baroclines

Instabilité barocline

Ondes de Rossby sur écoulement moyen

Écoulement zonal: $(u, v) = (U(y), 0)$. Anomalie de pression (géopotentiel) correspondante:

$$\eta = \eta_0(y) = - \int^y dy' U(y') \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \eta = -U'(y). \quad (103)$$

Linéarisation de (99) autour de η_0 , $\eta \rightarrow \eta_0 + \eta$:

$$(\partial_t + U(y)\partial_x) (\vec{\nabla}^2 \eta - \eta) + \partial_x \eta (-U''(y) + U(y)) + \partial_x \eta = 0. \Rightarrow \quad (104)$$

Gradient de la VP de l'écoulement moyen

$(-U''(y) + U(y))$ joue le même rôle que β (le dernier terme en (104)).

Si $U = \text{const}$, équation (104) à coefficients constants \rightarrow Fourier \rightarrow relation de dispersion:

$$\omega = Uk - \frac{k}{k^2 + l^2 + 1} \quad (105)$$

fréquence **absolue**. $\omega = -\frac{k}{k^2 + l^2 + 1}$ - fréquence **intrinsèque**.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Critère de Rayleigh

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Équation (104) sur le plan β , limite $R_d \rightarrow \infty$:

$$\nabla^2 \eta_t + U(y) \nabla^2 \eta_x - \eta_x U''(y) = 0. \quad (106)$$

Transformation de Fourier partielle:

$$\eta(x, y, t) \rightarrow \hat{\eta}(y) e^{ik(x-ct)} \Rightarrow$$

$$\hat{\eta}''(y) - \left[k^2 + \frac{U''(y)}{U(y) - c} \right] \hat{\eta}(y) = 0. \quad (107)$$

Conditions aux limites:

Canal zonal: $y_1 \leq y \leq y_2$ avec les conditions de **glissement libre** (pas de viscosité), où le plan entier ($y_{1,2} \rightarrow \infty$):

$$v|_{y=y_{1,2}} = \eta_x|_{y=y_{1,2}} = 0, \Rightarrow \hat{\eta}|_{y=y_{1,2}} = 0$$

Intégration par y

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \left[\hat{\eta}^*(y) \left(\hat{\eta}''(y) - \left[k^2 + \frac{U''(y)}{U(y) - c} \right] \hat{\eta}(y) \right) \right] = 0 \quad (108)$$

Intégration par parties + conditions aux limites:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \left(\hat{\eta}^{*'}(y) \hat{\eta}'(y) + \left[k^2 + \frac{U''(y)}{U(y) - c} \right] \hat{\eta}^*(y) \hat{\eta}(y) \right) = 0 \quad (109)$$

Notions et
approches de baseEquation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravitéOndes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profondInstabilité Kelvin
-HeimholtzOndes de Rossby
et instabilité
barotropeModèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotropeOndes de Rossby
et instabilité
baroclineModèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Partie imaginaire:

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{U''(y)}{|U(y) - c|^2} \hat{\eta}^*(y) \hat{\eta}(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \frac{U''(y)}{|U(y) - c|^2} \hat{\eta}^*(y) \hat{\eta}(y) = 0 \quad \text{si} \quad c_i \neq 0 \quad (110)$$

En absence des niveaux critiques ($U(y) - c \neq 0$), si l'écoulement est instable $U(y)$ a un **point d'inflexion**
 $\exists y_0 : U''(y_0) = 0$.

Exercice

Généraliser le critère de Rayleigh pour le plan β (critère de Rayleigh - Kuo)

Notions et
approches de baseEquation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

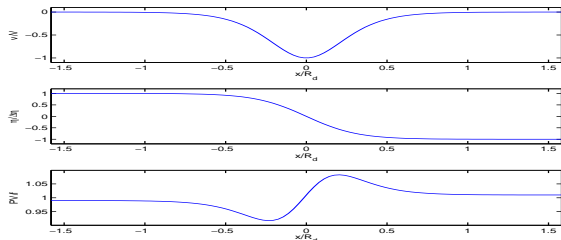
Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravitéOndes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profondInstabilité Kelvin
-HelmholtzOndes de Rossby
et instabilité
barotropeModèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotropeOndes de Rossby
et instabilité
baroclineModèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Exemple: instabilité barotrope du jet sur le plan f en RSW



Jet méridional en équilibre géostrophique

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Dispersion et taux de croissance

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

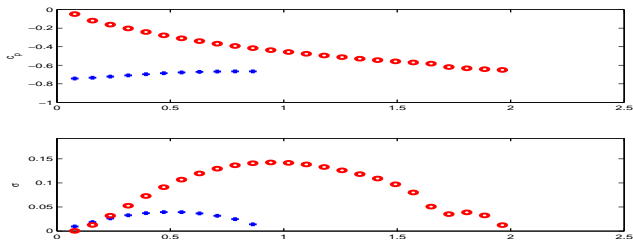
Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby

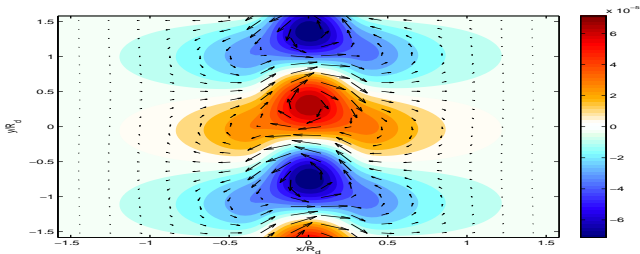
baroclines

Instabilité barocline



Vitesse de phase et taux de croissance de deux modes instables retrouvés par l'analyse de stabilité linéaire.

Mode le plus instable



Pression et vitesse du mode à taux de croissance maximal.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby
baroclines

Instabilité barocline

Évolution de la vorticité relative

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Heimholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

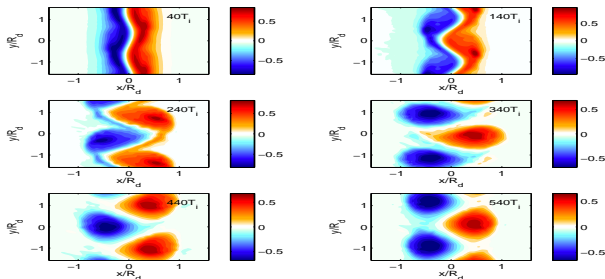
Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

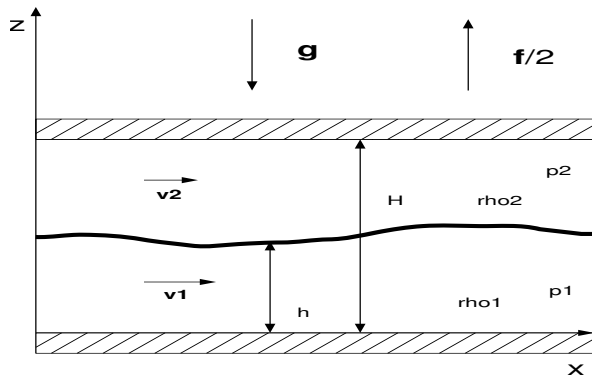
Ondes de Rossby

baroclines

Instabilité barocline



Modèle RSW à 2 couches, couvercle rigide.



Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Heimholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équations de mouvement

Équation de mouvement horizontal par couche

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}_i + \frac{1}{\rho_i} \nabla \pi_i = \mathbf{0}, i = 1, 2; \quad (111)$$

Conservation de masse par couche

$$\partial_t (H_i - (-1)^{i+1} \eta) + \nabla \cdot (\mathbf{v}_i (H_i - (-1)^{i+1} \eta)) = 0, i = 1, 2; \quad (112)$$

$H_i, i = 1, 2$ - épaisseurs non-perturbées des couches,
 $H_1 + H_2 = H, \eta$ - position de l'interface, $i + 1$ - modulo 2.

Condition dynamique à l'interface

$$(\rho_2 - \rho_1) g \eta = \pi_2 - \pi_1. \quad (113)$$

Conservation de VP par couche

$$(\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla) q_i = 0, \quad q_i = \frac{\zeta_i + f}{H_i - (-1)^{i+1} \eta}, \quad (114)$$

où $\zeta_i = \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v}_i$ vorticité relative dans la couche i ,
 $f = f_0 + \beta y$ - vorticité planétaire.

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby

baroclines

Instabilité barocline

Échelles caractéristiques, regime QG

- ▶ Vitesse horizontale typique: U
- ▶ Échelle horizontale typique: L
- ▶ Échelle temporelle: $T \sim L/U$ - temps de retournement
- ▶ Échelle de pression par couche: $P_i \sim \rho_i U L f_0$
- ▶ Échelle verticale typique: H ; $D_i = \frac{H_i}{H}$

Vent géostrophique adimensionné

$$u_i^g = -\partial_y \pi_i, \quad v_i^g = \partial_x \pi_i. \quad (115)$$

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Paramètres

- ▶ Nombre de Rossby: $Ro = \frac{U}{f_0 L}$
- ▶ Déviation adimensionnée typique de l'interface: λ
- ▶ Gradient adimensionné du paramètre de Coriolis: $\tilde{\beta}$
- ▶ Rapport d'aspect: $d = \frac{H_1}{H_2}$
- ▶ Paramètre de stratification: $N = 2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$
- ▶ Nombre de Burger: $Bu = \frac{R_d^2}{L^2}$, $R_d^2 = \frac{NgH}{f_0^2}$

Rayon de déformation **barocline**: $R_d^2 = \frac{g'H}{f_0^2}$, g' - **gravité réduite** $g' = gN$.

Conservation de VP en regime QG

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Vorticité potentielle adimensionnée par couche:

$$\begin{aligned}q_i &= \frac{f_0}{HD_i} \frac{\epsilon(v_x - u_y) + (1 + \epsilon y)}{1 - (-1)^{i+1} D_i^{-1} \epsilon \eta} \\&= \frac{f_0}{HD_i} (\epsilon(v_x - u_y) + (1 + \epsilon y)) (1 + (-1)^{i+1} D_i^{-1} \epsilon \eta + \dots) \\&= \frac{f_0}{HD_i} \left[1 + \epsilon (v_x - u_y + y + (-1)^{i+1} D_i^{-1} \eta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right].\end{aligned}$$

Advection avec le vent géostrophique dans chaque couche:

$$\partial_t \dots + u_i^g \partial_x \dots + v_i^g \partial_y \dots \rightarrow \partial_t \dots + \mathcal{J}(\pi_i, \dots) \quad (116)$$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Équations QG 2 couches

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"

Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques

Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond

Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG

Ondes de Rossby

Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches

Ondes de Rossby

baroclines

Instabilité barocline

$$\frac{d_i^g}{dt} \left[\nabla^2 \pi_i + y - (-1)^i D_i^{-1} \eta \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (117)$$

où

$$\frac{d_i^g}{dt} (\dots) := \partial_t (\dots) + J(\pi_i, \dots), \quad i = 1, 2 \quad (118)$$

Limite standard: faible stratification $\rightarrow \rho_2 \rightarrow \rho_1 \Rightarrow$

$$\eta = \pi_2 - \pi_1$$

Composantes barocline et barotrope

$$\eta = \pi_2 - \pi_1 - \text{barocline}; \quad \Pi = D_1\pi_1 + D_2\pi_2 - \text{barotrope}.$$

- ▶ $\eta = 0$ - mouvement (vitesse) identique dans les deux couches
- ▶ $\Pi = 0$ - mouvement (vitesse) opposé(e) dans les couches

Linéarisation formelle

$$\begin{aligned}\partial_t \left[\nabla^2 \pi_1 + D_1^{-1} (\pi_2 - \pi_1) \right] + \partial_x \pi_1 &= 0 \\ \partial_t \left[\nabla^2 \pi_2 - D_2^{-1} (\pi_2 - \pi_1) \right] + \partial_x \pi_2 &= 0\end{aligned}\quad (119)$$

Solutions-ondes: $\pi_j = A_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$.

Condition de solvabilité:

$$\det \begin{pmatrix} \omega(\mathbf{k}^2 + D_1^{-1}) + k_x & -\omega D_1^{-1} \\ -\omega D_2^{-1} & \omega(\mathbf{k}^2 + D_2^{-1}) + k_x \end{pmatrix} = 0. \quad (120)$$

Relation de dispersion:

$$\omega = -\frac{k_x}{2\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + D_1^{-1} + D_2^{-1})} \left[(2\mathbf{k}^2 + D_1^{-1} + D_2^{-1}) \pm (D_1^{-1} + D_2^{-1}) \right] \quad (121)$$

- ▶ Mode **barotrope**: $\omega_{bt} = -\frac{k_x}{\mathbf{k}^2}$ - plus rapide.
- ▶ Mode **barocline**: $\omega_{bc} = -\frac{k_x}{(\mathbf{k}^2 + D_1^{-1} + D_2^{-1})}$ - plus lente.

Instabilité barocline

Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Modèle de Phillips

Modèle QG à 2 couches, $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \rightarrow 0 \Rightarrow \eta = \pi_2 - \pi_1$:

$$\frac{d_i^{(0)}}{dt} \left[\nabla^2 \pi_i + y - (-1)^i D_i^{-1} \eta \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (122)$$

État de base

Solution: $U_i = \partial_y \pi_i$, $i = 1, 2$ $U_1 \neq U_2$ - cisaillement vertical \Rightarrow **Interface inclinée**: $\eta = \pi_2 - \pi_1 = (U_1 - U_2)y \rightarrow$ énergie potentielle disponible.

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

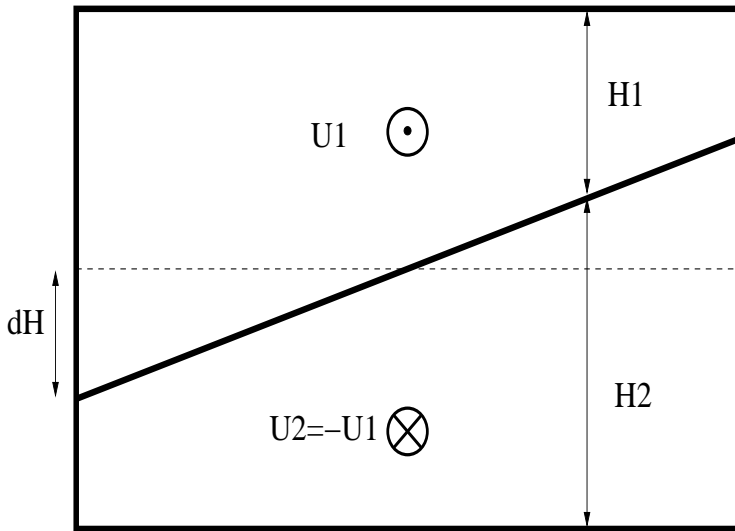
Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

$-Y_{\max}$

Y_{\max}



Ondes
atmosphériques et
océaniques

V. Zeitlin

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Linéarisation

$$\pi_i = -U_i y + \phi_i, \quad \|\phi\| \ll 1. \Rightarrow$$

$$(\partial_t + U_i \partial_x) \left[\vec{\nabla}^2 \phi_i - (-1)^i D_i^{-1} (\phi_2 - \phi_1) \right] + \left[1 - (-1)^i (U_1 - U_2) \right] \partial_x \phi_i = 0. \quad (123)$$

Solutions-ondes (transformation de Fourier):

$$\phi_i = A_i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

Notation: $c = \omega/k_x$, $U_1 - U_2 = \Delta U$, $F_i = D_i^{-1}$.

$$A_1 \left[(c - U_1)(\mathbf{k}^2 + F_1) + 1 + F_1(U_1 - U_2) \right] - A_2 (c - U_1) F_1 - A_1 (c - U_2) F_2 + A_2 \left[(c - U_2)(\mathbf{k}^2 + F_2) + 1 - F_2(U_1 - U_2) \right] = 0.$$

Notions et
approches de base

Equation "onde simple"
Dispersion, non-linéarité

Rappels

Ondes internes
d'inertie - gravité

Ondes hydrostatiques
Ondes non-hydrostatiques

Ondes surfaciques

Fluide peu profond
Fluides profond

Instabilité Kelvin
-Helmholtz

Ondes de Rossby
et instabilité
barotrope

Modèle QG
Ondes de Rossby
Instabilité barotrope

Ondes de Rossby
et instabilité
barocline

Modèle QG 2 couches
Ondes de Rossby
baroclines
Instabilité barocline

Relation de dispersion

$$c = U_2 + \frac{1}{2\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + F_1 + F_2)} \left[\left(\Delta U \mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + 2F_2) - 2\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + F_1 + F_2) \right) \pm \left[(F_1 + F_2)^2 + 2\Delta U \mathbf{k}^4 (F_1 - F_2) - \mathbf{k}^4 (\Delta U)^2 (4F_1 F_2 - \mathbf{k}^4) \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

Cisaillement ΔU assez fort, $|\mathbf{k}|$ assez petit \rightarrow **fréquence (ou c) à partie imaginaire non-nulle \rightarrow croissance de l'amplitude \rightarrow instabilité.**

Remarque:

Instabilité existe sur le plan f : **l'inclinaison d'interface** \Rightarrow
gradient de VP due au cisaillement suffit pour faire
propager les ondes de Rossby:

$$c = \frac{1}{2(\mathbf{k}^2 + F_1 + F_2)} \left[U_1(\mathbf{k}^2 + 2F_2) + U_2(\mathbf{k}^2 + 2F_1) \right. \\ \left. \pm \left[(\Delta U)^2 (\mathbf{k}^4 - 4F_1 F_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (124)$$

Exercice

- ▶ Trouver le seuil d'instabilité dans le cas $F_1 = F_2$,
- ▶ Trouver la longueur d'onde qui correspond au taux de croissance maximal.