Ondes atmosphériques

Instabilité barocline

Instabilité barocline : critère d'instabilité (1)

Etat de base $U_0(y,z) = \frac{-\partial \Psi}{\partial y}$

$$q \to Q_0 + q$$

$$Q_0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + f_0^2 \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_R}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$q = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_R}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Equations linéarisées

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) q + v \frac{\partial Q_0}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} - v \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0 \quad en\ z = z_B, z_T \qquad (2)$$

On a choisi une surface libre en bas et en haut pour simplifier

Equation pour l'énergie de perturbation

$$E = \iiint_{z_B}^{z_T} \rho_R \left(u^2 + v^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right) dx\, dy\, dz$$

En multipliant (1) par $-\rho_R \psi$, (2) par $-\rho_R \psi\, f_0^2 / N^2$ et en intégrant par parties

$$\boldsymbol{\frac{dE}{dt} = -\iiint dx\, dy\, dz (\rho_R U_0 v q) - \iint dx\, dy \left[\rho_R \frac{f_0^2}{N^2} v\, U_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_B^T}$$

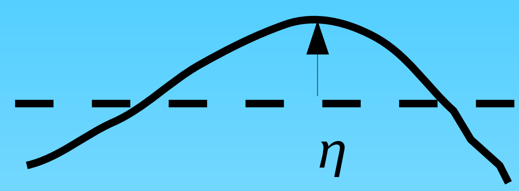
Instabilité barocline : critère d'instabilité (2)

$$\frac{dE}{dt} = -\iiint dx\,dy\,dz\,(\rho_R U_0 v\,q) - \iint dx\,dy \left[\rho_R \frac{f_0^2}{N^2} v\,U_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_B^T$$

Définissons le déplacement en latitude des éléments de fluide $\eta(x, y, z, t)$

tel que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v$

De part la conservation de la vorticité potentielle, la perturbation q provient du déplacement: $q = -\eta \frac{\partial Q_0}{\partial y}$



Soit $v\,q = \frac{1}{2}\frac{\partial \eta^2}{\partial t}\frac{\partial Q_0}{\partial y}$

Sur les frontières

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\eta \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y \partial z} = -\frac{\eta}{f_0}\frac{\partial B_0}{\partial y}, \qquad v\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2 f_0}\frac{\partial \eta^2}{\partial t}\frac{\partial B_0}{\partial y}$$

et ainsi :

$$\frac{d}{dt}\left\{E - \iiint dx\,dy\,dz\left(\rho_R \frac{\eta^2}{2} U_0 \frac{\partial Q_0}{\partial y}\right) + \iint dx\,dy\left[\frac{f_0}{N^2}\rho_R \frac{\eta^2}{2} U_0 \frac{\partial B_0}{\partial y}\right]_B^T\right\} = 0$$

Si on suppose U_0 partout positif, cela implique que l'instabilité ne peut se développer que si le gradient méridien de Q_0 change de signe à l'intérieur du domaine ou/et s'il est de signe identique (opposé) au gradient méridien de température à la frontière inférieure (supérieure) (généralisation du critère de Rayleigh).

Une approche simplifiée de l'instabilité quasi-géostrophique

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi+\mu^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0 \qquad -\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \qquad z=\pm\frac{1}{2}$$

Problème de Eady

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \qquad z=\pm\frac{1}{2}$$

$$0=\nabla^2\psi+\mu^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad -\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$$

$$\psi=\sum_{\vec{k}}\left(\underbrace{\psi^0_{\vec{k}}\cosh\frac{Kz}{\mu}}_{\text{barotrope}}+\underbrace{\psi^1_{\vec{k}}\sinh\frac{Kz}{\mu}}_{\text{barocline}}\right)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \qquad \text{avec} \qquad K=|\vec{k}|$$

Problème de Charney

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi+\mu^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0 \qquad -\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \qquad z=\pm\frac{1}{2}$$

On considère les deux premiers modes verticaux

$$\psi=\sum_{\vec{k}}\left(\underbrace{\psi^0_{\vec{k}}}_{\text{barotrope}}+\underbrace{\psi^1_{\vec{k}}\sin\pi z}_{\text{barocline}}\right)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Instabilité barocline dans le modèle de Eady (1)

Etat de base $U=\Lambda z \qquad \Psi=-\Lambda z\, y$

Equation linéarisée pour $\psi_z=\frac{\partial\psi}{\partial z}$

$$\frac{\partial\psi_z}{\partial t}+U\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}=٠$$

En $z=\frac{١}{٢} \qquad \frac{\partial\psi_z}{\partial t}+\frac{\Lambda}{٢}\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\Lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}=٠$

En $z=-\frac{١}{٢} \qquad \frac{\partial\psi_z}{\partial t}-\frac{\Lambda}{٢}\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\Lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}=٠$

$$\psi=\sum_{\vec{k}}\left(\psi^{٠}_{\vec{k}}\cosh\frac{K z}{\mu}+\psi^{١}_{\vec{k}}\sinh\frac{K z}{\mu}\right)e^{i k(x-c t)}\cos l\, y$$

donc

$$-i\frac{k K c}{\mu}\psi^{١}_{\vec{k}}\cosh\frac{K}{٢\mu}+i\frac{\Lambda k K}{٢\mu}\psi^{٠}_{\vec{k}}\sinh\frac{K}{٢\mu}-i k\Lambda\psi^{٠}_{\vec{k}}\cosh\frac{K}{٢\mu}=٠$$

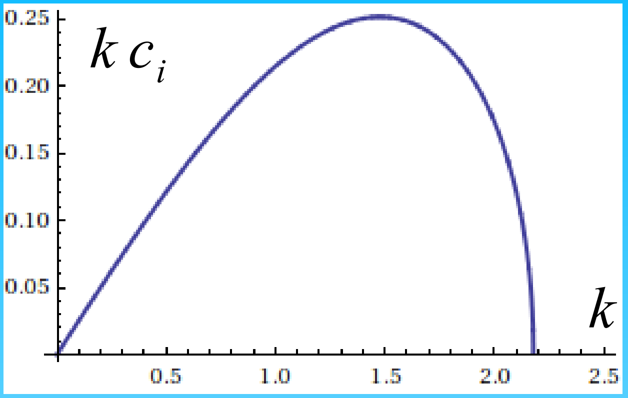
$$-i\frac{k K c}{\mu}\psi^{٠}_{\vec{k}}\sinh\frac{K}{٢\mu}+i\frac{\Lambda k K}{٢\mu}\psi^{١}_{\vec{k}}\cosh\frac{K}{٢\mu}-i k\Lambda\psi^{١}_{\vec{k}}\sinh\frac{K}{٢\mu}=٠$$

Relation de dispersion

$$c^{٢}=\Lambda^{٢}\left(\frac{\mu^{٢}}{K^{٢}}+\frac{١}{٤}-\frac{\mu}{K}\coth\frac{K}{\mu}\right)=\frac{\Lambda^{٢}\mu^{٢}}{K^{٢}}\left(\frac{K}{٢\mu}-\tanh\left(\frac{K}{٢\mu}\right)\right)\left(\frac{K}{٢\mu}-\coth\left(\frac{K}{٢\mu}\right)\right)$$

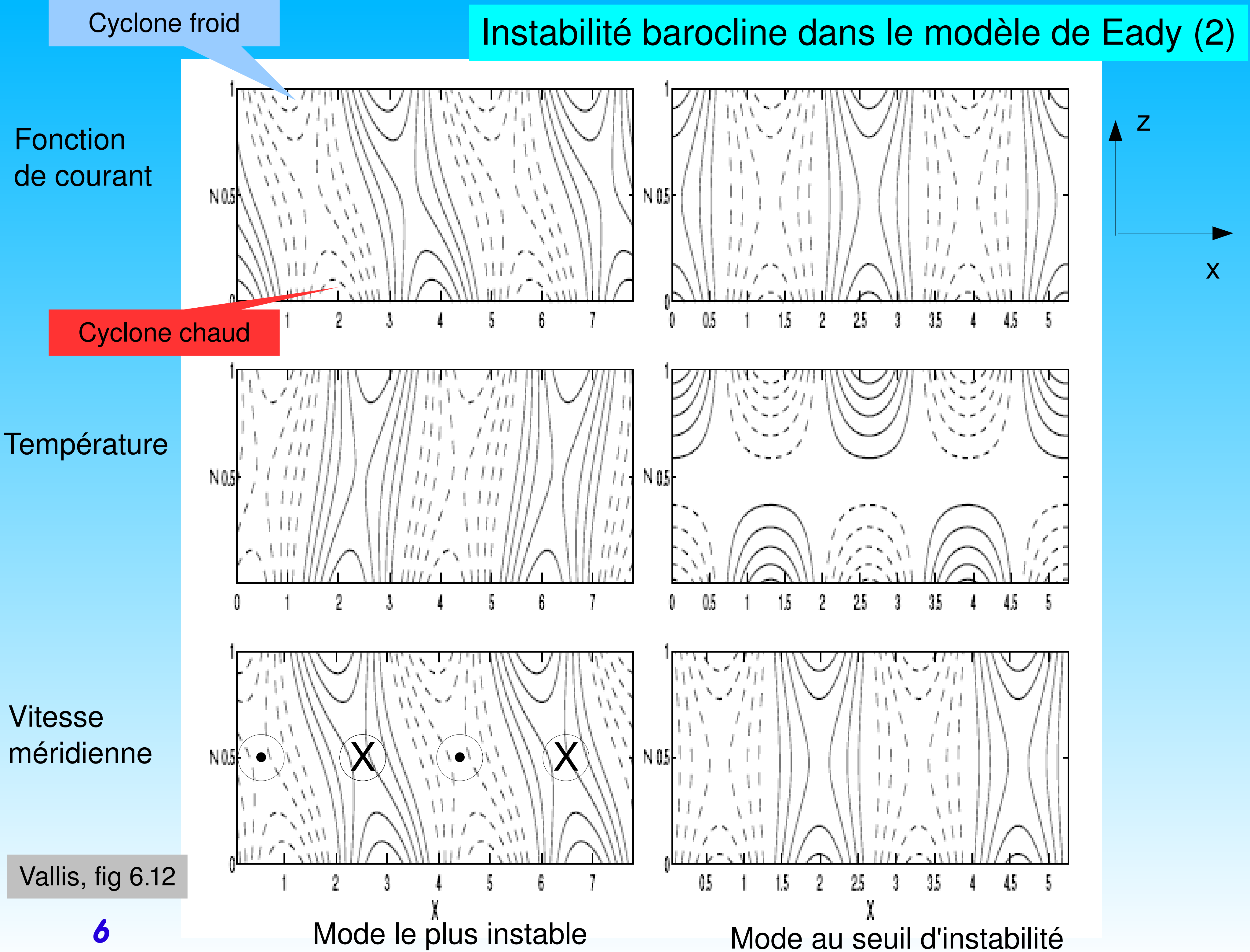
Puisque $x>\tanh(x)$, la condition d'instabilité est $\frac{K}{٢\mu}<\coth\left(\frac{K}{٢\mu}\right)$,

ce qui est satisfait pour $\frac{K}{٢\mu}<٢,٣٩٩$



taux de croissance pour $\mu=1$ et $l=1$

Instabilité barocline dans le modèle de Eady (2)



Vallis, fig 6.12

Modèle simplifié en couches (Phillips) (1)

$z_{\text{٤}}$

$z_{\text{٣}}$

$z_{\text{٢}}$

$z_{\text{١}}$

$z_{\text{٠}}$

Epaisseur $z_{i+\text{١}}-z_i=h$

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi+\mu^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\beta\, y\right)=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \quad \text{en} \quad z=z_{0,}\;\; z_4$$

Equations sur les niveaux 1 et 3

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nabla\psi_1\cdot\nabla\right)\left(\nabla^2\psi_1+\beta\, y+S(\psi_3-\psi_1)\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nabla\psi_3\cdot\nabla\right)\left(\nabla^2\psi_3+\beta\, y+S(\psi_1-\psi_3)\right)=0$$

avec $S=\dfrac{\mu^2}{4\,h^2}$

Etat de base $U_{1,}\quad U_{3,}\quad \Psi_1=-U_1\,y\,,\quad \Psi_3=-U_3\,y$

Etat perturbé $\psi_1=\Psi_1+\psi_1{}',\quad \psi_3=\Psi_3+\psi_3{}'$

Equations linéarisées

$$O=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_1{}'+S(\psi_3{}'-\psi_1{}')\right)+\frac{\partial\psi_1{}'}{\partial x}S(U_1-U_3)+\beta\frac{\partial\psi_1{}'}{\partial x}$$

$$O=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_3{}'+S(\psi_1{}'-\psi_3{}')\right)+\frac{\partial\psi_3{}'}{\partial x}S(U_3-U_1)+\beta\frac{\partial\psi_3{}'}{\partial x}$$

Modèle simplifié en couches de Phillips (2)

Equations linéarisées

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_1'+S(\psi_3'-\psi_1')\right)+\frac{\partial\psi_1'}{\partial x}S(U_1-U_3)+\beta\frac{\partial\psi_1'}{\partial x}$$

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_3'+S(\psi_1'-\psi_3')\right)+\frac{\partial\psi_3'}{\partial x}S(U_3-U_1)+\beta\frac{\partial\psi_3'}{\partial x}$$

On pose $\psi_m=\frac{1}{2}(\psi_1'+\psi_3')$, $\quad\psi_T=\frac{1}{2}(\psi_3'-\psi_1')$, $\quad U_m=\frac{1}{2}(U_1+U_3)$, $\quad U_T=\frac{1}{2}(U_3-U_1)$

d'où
$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi_m+\beta\frac{\partial\psi_m}{\partial x}+U_T\frac{\partial\nabla^2\psi_T}{\partial x}$$

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2\psi_T-2S\psi_T)+\beta\frac{\partial\psi_T}{\partial x}+U_T\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi_m+2S\psi_m)$$

On adopte $\psi_m=Ae^{ik(x-ct)}\cos ly$ et $\psi_T=Be^{ik(x-ct)}\cos ly$ avec $K^2=k^2+l^2$

Ainsi $ik\left((c-U_m)K^2+\beta\right)A-ikK^2U_TB=0$

$$-ikU_T(K^2-2S)A+ik\left((c-U_m)(K^2+2S)+\beta\right)B=0$$

L'équation caractéristique est

$$(c-U_m)^2(K^4+2SK^2)+2\beta(K^2+S)(c-U_m)+\beta^2+U_T^2(2S-K^2)=0$$

Relation de dispersion $\boldsymbol{c=U_m+\frac{\beta(K^2+S)}{K^2(K^2+2S)}\pm\delta}$

avec $\boldsymbol{\delta^2=\frac{\beta^2S^2}{K^4(K^2+2S)^2}-U_T^2\frac{2S-K^2}{K^2+2S}}$

Modèle simplifié en couches de Phillips (3)

Relation de dispersion $c = U_m + \dfrac{\beta(K^2+S)}{K^2(K^2+2S)} \pm \delta$

avec $\delta^2 = \dfrac{\beta^2 S^2}{K^4(K^2+2S)^2} - U_T^2 \dfrac{2S-K^2}{K^2+2S}$

a) $U_T = 0$, dans ce cas c est réel (propagation pure) avec deux valeurs possibles

$c_1 = U_m - \dfrac{\beta}{K^2}$ (mode externe) et $c_2 = U_m - \dfrac{\beta}{K^2+2S}$ (mode interne)

b) $\beta = 0$, dans ce cas $c = U_m \pm U_T \left(\dfrac{K^2-2S}{K^2+2S}\right)^{1/2}$

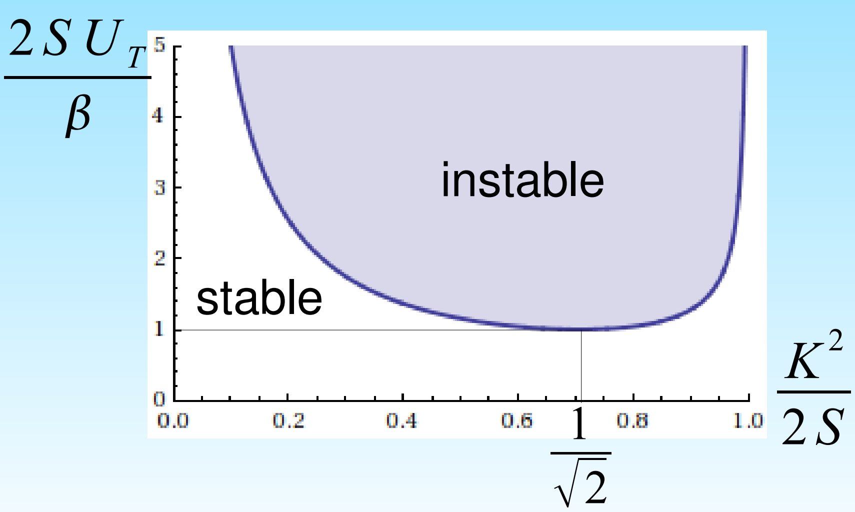
Il y a instabilité pour $K < \sqrt{2S}$

c) cas général, le seuil d'instabilité $\delta = 0$ est alors donné par

$$\frac{K^4}{2S^2} = 1 \pm \left(1 - \frac{\beta^2}{4S^2U_T^2}\right)^{1/2}$$

β a un effet stabilisateur

Avec $U_T = 4\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
entre 750 et 250 hPa.
Mode le plus instable:
$K = 1/4000$ km



Modèle simplifié en couches de Phillips (4)

La vorticité de l'écoulement de base est

$$Q_3 = \beta y + S y (U_3 - U_1)$$
$$Q_1 = \beta y + S y (U_1 - U_3)$$

sachant que $U_1 < U_3$, la condition nécessaire d'instabilité sur les gradients de vorticité potentielle est

$$\frac{\partial Q_1}{\partial y} < 0 < \frac{\partial Q_3}{\partial y}$$

c'est à dire $S(U_1 - U_3) \; < \; -\beta \; < \; S(U_3 - U_1)$

ce qui se traduit par $\dfrac{2 S U_T}{\beta} > 1$

permettant de retrouver le critère d'instabilité établi dans les vues précédentes.

Ici le gradient est purement dû à la vorticité planétaire et à la structure thermique, le vent étant uniforme sur chaque niveau.