EXERCICES
Equilibre radiatif

1

Une surface plate à bord d'un satellite se comporte comme un corps gris (absorption indépendante de la longueur d'onde) avec un facteur d'absorption a. Calculez la température d'équilibre radiatif de cette surface lorsqu'elle fait face au soleil avec $a = 0,2$ et $a = 0,8$. On rappelle la constante de Stephan $\sigma = 5,670\ 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} et le flux solaire $S = 1360$ W m^{-2}.

---

2 Effet de serre d'une atmosphère à une couche

On considère une atmosphère isotherme de température T_a. La température de la surface est T_S, l'albédo planétaire est α et le flux de rayonnement incident au sommet de l'atmosphère est S_0. On suppose l'atmosphère totalement transparente pour le rayonnement solaire incident et que l'absorption est uniforme sur tout le spectre infrarouge.

a) Rappeler les équations du transfert radiatif en fonction de la profondeur optique.

b) Exprimer le flux infrarouge montant en fonction de la transmittivité infrarouge de l'atmosphère entre le sol (niveau 0) et le niveau z : $\tau(0, z) = \exp(-\int_0^z k\rho dz')$. faites de même pour le flux descendant.

c) On définit l'émissivité par $\epsilon = 1 - \bar{\tau}$ où $\bar{\tau}$ est la transmittivité entre le sol et le sommet de l'atmosphère. Ecrire le flux infrouge émis vers le haut au sommet de l'atmosphère $F_\infty^\uparrow$ et le flux émis vers le bas à sa base $F_S^\downarrow$. Utiliser le fait que la surface est un corps noir pour exprimer $F_\infty^\uparrow$, $F_S^\downarrow$ et l'effet de serre $G = \sigma T_S^4 - F_\infty^\uparrow$ en fonction de T_a, T_S et ϵ.

d) Déterminer T_S en fonction de S_0, α et ϵ. Déterminer T_a.

2.1 Solution

a) La profondeur optique comptée à partir du sommet de l'atmosphère est telle que $d\chi = -k\rho dz$ (on ne tient pas compte ici du facteur 5/3 introduit dans le cours ou on le suppose inclu dans le coefficient d'aborption k).

La profondeur optique totale de l'atmosphère, calculée au sol, est χ_A. La correspondance avec la transmittivité est $\tau = \exp(\chi - \chi_A)$. Au sommet de l'atmosphère on a ainsi $\chi = 0$ et $\tau = \bar{\tau}$ alors qu'au sol on a $\chi = \chi_A$ et $\tau = 1$.

Si la température est constante, les lois du transfert radiatif pour les flux montant et descendant sont

$$\begin{aligned} \frac{dF^{\uparrow}}{d\chi} &= F^{\uparrow} - \pi B\,, \\ -\frac{dF^{\downarrow}}{d\chi} &= F^{\downarrow} - \pi B\,, \end{aligned}$$

où B est l'émissivité du corps noir. Dans le cas d'une atmosphère isotherme, B est uniforme : $\pi B = \sigma T_a^4$.

b) L'intégration de l'équation du flux montant donne

$$F^{\uparrow} = \sigma T_a^4 + A e^{\chi}\,.$$

Si $F_S^{\uparrow}$ est le flux montant au sol, et en tenant compte de la définition de τ on a

$$F^{\uparrow} = \sigma T_a^4 + (F_S^{\uparrow} - \sigma T_a^4)\tau\,.$$

De même, l'équation pour le flux descendant s'intègre en

$$F^{\downarrow} = \sigma T_a^4 + B e^{-\chi}\,.$$

Le flux descendant infrarouge étant nul au sommet de l'atmosphère, on obtient

$$F^{\downarrow} = \sigma T_a^4 (1 - e^{-\chi}) = \sigma T_a^4 \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)\,.$$

c) En remplaçant $\bar{\tau}$ par ϵ et en utilisant $F_S^{\uparrow} = \sigma T_S^4$, on obtient

$$\begin{aligned} F_{\infty}^{\uparrow} &= \sigma((1-\epsilon)T_S^4 + \epsilon T_a^4)\,, \\ F_S^{\downarrow} &= \sigma \epsilon T_a^4\,. \end{aligned}$$

On note que les flux au sommet et à la base de la couche sont seulement caractérisés par l'émissivité totale ϵ. Le résultat serait le même pour une mince couche de matériau de même émissivité que l'atmosphère.

d) L'équilibre radiatif au sommet de l'atmosphère et au sol s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} F_{\infty}^{\uparrow} &= S_0(1-\alpha)\,, \\ F_S^{\downarrow} + S_0(1-\alpha) &= \sigma T_S^4\,. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T_S^4 &= 2T_a^4\,, \\ S_0(1-\alpha) &= \sigma\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) T_s^4\,, \end{aligned}$$

$$G = \frac{\epsilon(1-\alpha)S_0}{2-\epsilon}\,.$$

3 Effet de serre dune atmosphère à deux couches

On considère maintenant une atmosphère à deux couches. La couche inférieure a pour température T_1 et pour émissivité ϵ_1. La couche supérieure a pour température T_2 et pour émissivité ϵ_2. La température de surface est T_S et le flux sortant IR au sommet de l'atmosphère est $F_\infty^\uparrow$.

- a) Exprimer les conditions de l'équilibre radiatif à la surface, au sommet de l'atmosphère et à l'interface entre les deux couches
- b) Exprimer T_1 et T_2 en fonction de T_S et des paramètres.
- c) Exprimer T_S en fonction du flux entrant et estimer l'effet de serre G. Application numérique :$\epsilon_1 = 0,85$, $\epsilon_2 = 0,52$ et $F_\infty^\uparrow = 240$ W m^{-2}.
- d) Calculer la variation de G en fonction des émissivités.

3.1 Solution

On tient compte du résultat de l'exercice sur l'atmosphère à une couche pour traiter chaque couche isotherme comme un bloc caractérisé par sa température et son émissivité, sans rechercher le profil des flux à l'intérieur.

Les relations sont

1. Emission du sol
$$F_S^\uparrow = \sigma T_S^4$$
2. Flux IR montant entre les deux couches
$$F_I^\uparrow = (1-\epsilon_2)F_S^\uparrow + \sigma\epsilon_2 T_2^4$$
3. Flux IR montant au sommet de l'atmosphère
$$F_\infty^\uparrow = \phi_0 = F_I^\uparrow(1-\epsilon_1) + \sigma\epsilon_1 T_1^4$$
4. Flux IR descendant entre les deux couches
$$F_I^\downarrow = \sigma\epsilon_1 T_1^4$$
5. Flux IR descendant au sol
$$F_S^\downarrow = F_I^\downarrow(1-\epsilon_2) + \sigma\epsilon_2 T_2^4$$
6. Bilan du sol
$$\phi_0 + F_S^\downarrow = F_S^\uparrow$$
7. Bilan entre les deux couches
$$F_I^\uparrow = F_I^\downarrow + \phi_0$$

En éliminant les flux entre les relations 5, 6, 1 et 4, on obtient

$$\epsilon_1 T_1^4(1-\epsilon_2) + \epsilon_2 T_2^4 = T_S^4 - \phi_0/\sigma\,.$$

En utilisant les relations 3, 2 et 1, on obtient

$$\phi_0/\sigma = \epsilon_1 T_1^4 + (1-\epsilon_1)[(1-\epsilon_2)T_S^4 + \epsilon_2 T_2^4]\,.$$

En utilisant les relations 2, 7, 4 et 1, on obtient

$$\phi_0/\sigma + \epsilon_1 T_1^4 = (1-\epsilon_2)T_S^4 + \epsilon_2 T_2^4\,.$$

En éliminant ϕ_0 entre la première et la troisième de ces nouvelles relations, on a

$$2T_2^4 = T_S^4 + \epsilon_1 T_1^4,$$

et e éliminant ϕ_0 entre la deuxième et la troisième relation, on a

$$2T_1^4 = \epsilon_2 T_2^4 + (1-\epsilon_2)T_S^4.$$

Noter que l'on aurait pu obtenir directement les deux dernières relations en écrivant le bilan de chaque couche.

Après quelques manipulations supplémentaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma T_S^4 &= \frac{4-\epsilon_1\epsilon_2}{4-2(\epsilon_1+\epsilon_2)+\epsilon_1\epsilon_2}\phi_0 \\
T_1^4 &= \frac{2-\epsilon_2}{4-\epsilon_1\epsilon_2} T\S^4 \\
T_2^4 &= \frac{2+\epsilon_1-\epsilon_1\epsilon_2}{4-\epsilon_1\epsilon_2} T\S^4
\end{aligned}$$

Ceci permet d'obtenir l'effet de serre

$$G = 2\frac{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_1\epsilon_2}{4-2(\epsilon_1+\epsilon_2)+\epsilon_1\epsilon_2}\phi_0,$$

dont les variations en fonction des émissivités sont

$$\frac{dG}{d\epsilon_1} = \frac{2}{(2-\epsilon_1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{dG}{d\epsilon_2} = \frac{2}{(2-\epsilon_2)^2}.$$

Application numérique $G = 261,7$ W m^{-2}, ce qui conduit à $T_S = 303K$. Plus l'émissivité est forte, plus sa variation a un impact important sur l'effet de serre. C'est donc la variation de ϵ_1 qui est la plus sensible.

4

Le capot d'une automobile peut être modélisé comme une plaque horizontale placée au dessus du sol dont le coefficient d'absorption est a_{IR} =0,9 dans l'infrarouge. L'atmosphère est modélisée comme un corps gris isotherme, transparent dans le visible, dont le coefficient d'absorption est a_{IR}^{A} =0,8 dans l'infrarouge. Dans ce cas, estimez la température du capot pour un soleil avec une incidence de 25° si (a) la couleur de l'automobile est claire avec un coefficient d'absorption dans le visible a_{V} =0,2 et (b) la couleur est sombre avec un coefficient d'absorption a_{V} =0,6. Quel phénomènge limite en pratique les valeurs observées pour la température ?

On traitera l'automobile comme un bloc sous le capot en équilibre thermique avec ce dernier. On donne la constante de Stefan σ = 5,67 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}, le flux solaire à l'extérieur de l'atmosphère $\Phi_0 = 1372$ W m^{-2}, et l'atmosphère est sèche et sans nuage.

4.1 Solution

On note Φ_0 le flux solaire incident au sol dans le visible. La première relation est obtenue en écrivant que le flux reçu par le capot (termes de gauche) est égal au flux émis (terme de droite) :

$$\Phi_0 a_{\mathrm{V}} + a_{\mathrm{IR}} F_S^{\downarrow} = a_{\mathrm{IR}} \sigma T_S^4 \,,$$

où $F_S^{\downarrow}$ est le flux descendant à la base de l'atmosphère et T_S est la température du capot. Les autres relations sont :

- Le flux IR descendant à la base de l'atmosphère en fonction de son émissivité

  $$F_S^{\downarrow} = a_{\mathrm{IR}}^{A} \sigma T_a^4 \,,$$

  où T_a est la température de l'atmosphère.
- Le flux IR montant au sommet de l'atmosphère en fonction de l'absorption du flux à la base et de l'émissivité

  $$F_{\infty}^{\uparrow} = (1 - a_{\mathrm{IR}}^{A}) F_S^{\uparrow} + \sigma a_{\mathrm{IR}}^{A} T_a^4 \,.$$

- Le flux montant IR à la base de l'atmosphère en fonction de l'émissivité du capot et du rayonnement IR réfléchi. l'atmosphère

  $$F_S^{\uparrow} = a_{\mathrm{IR}} \sigma T_S^4 + (1 - a_{\mathrm{IR}}) F_S^{\downarrow} \,.$$

- L'équilibre entre le flux sortant IR au sommet et le flux incident absorbé

  $$F_{\infty}^{\uparrow} = a_{\mathrm{V}} \Phi_0 \,.$$

– L'équilibre énergétique de la couche entre flux IR absorbé et flux IR émis

$$a^A_{\mathrm{IR}} a_{\mathrm{IR}} \sigma T_S^4 = 2 a^A_{\mathrm{IR}} \sigma T_a^4 \,.$$

Notez le facteur 2 qui tient compte de l'émission dans les deux demi-plans supérieur et inférieur.

Nous avons écrit 6 relations pour 5 variables $F_S^{\uparrow}$, $F_S^{\downarrow}$, $F_{\infty}^{\uparrow}$, T_a et T_S. Une de ces relations est en fait redondante et se détermine à partir des autres. Par éliminations successives, on obtient

$$\Phi_0 \frac{a_{\mathrm{V}}}{a_{\mathrm{IR}}} \left(1 + \frac{a^A_{\mathrm{IR}} a_{\mathrm{IR}}}{2 - a^A_{\mathrm{IR}}} \right) = \sigma T_S^4 \,.$$

Cette expression permet de déterminer la température du capot en fonction du flux solaire incident et des propriétés d'absorption.

On peut aussi l'obtenir plus rapidement en examinant l'équilibre des flux au dessus du capot. On a ainsi

$$F_S^{\uparrow} = \Phi_0 a_{\mathrm{V}} + \frac{1}{2} F_S^{\uparrow} a^A_{\mathrm{IR}} = a_{\mathrm{IR}} \sigma T_S^4 + \frac{1}{2} F_S^{\uparrow} a^A_{\mathrm{IR}} (1 - a_{\mathrm{IR}}) \,.$$

On a écrit ici que (i) le flux montant IR à la base de l'atmosphère est égal au flux visible absorbé plus la moitié du flux montant absorbé et réémis par l'atmosphère (l'autre moitié étant renvoyée vers le haut), c'est à dire à tout le flux qui arrive sur le capot et en repart sous forme IR, et (ii) le flux montant IR est égal à l'émisssion par le capot plus la partie du flux descendant IR qui n'est pas absorbée par le capot (et donc réfléchie). L'élimination de $F_S^{\uparrow}$ permet de retrouver la même relation que précédemment fixant T_S.

Application numérique : Dans les conditions atmosphériques indiquées, l'albédo est négligeable et le flux incident sur le capot est

$$\Phi_0 = S_0 \cos 25° = 1247 \text{ W m}^{-2} \,,$$

d'où

$$\sigma T_S^4 = 1247 \times \frac{1}{0{,}9} \left(1 + \frac{0{,}9 \times 0{,}8}{2 - 0{,}8} \right) a_{\mathrm{V}} = 1247 \times \frac{1{,}6}{0{,}9} a_{\mathrm{V}} = 2217 a_{\mathrm{V}} \,.$$

Avec a_{V} =0,2 on obtient T_S =296 K at avec a_{V} =0,6 on obtient T_S =390 K.

Il est donc fortement recommandé d'utiliser des peintures claires dans les contrées désertiques et ensoleillées. En pratique la température est limitée par l'échange de chaleur convectif au dessus du capot et la ventilation lorsque le véhicule est en mouvement.

5

On considère un modèle simple de l'atmosphère formée d'une couche isotherme grise dont les absorptions dans le visible et l'infra-rouge sont a_{V} et a_{IR}^{A}, respectivement, et une surface sous-jacente se comportant comme un corps noir. On suppose le tout en équilibre radiatif avec un flux solaire incident Φ_0 dans le visible. Ecrivez les flux entrant et sortant de l'atmosphère et déterminer la température du sol T_S, de l'atmosphère T_a et l'effet de serre $G = \sigma T_S^4 - \Phi_0$. Calculez T_s pour $\Phi_0 = 240$ W m^{-2}, a_{V}=0,20 et a_{IR}^{A}=0,94. On donne la constante de Stefan $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.

5.1 Solution

Le sol reçoit dans le visible et l'IR

$$\phi = (1 - a_{\mathrm{V}})\Phi_0 + a_{\mathrm{IR}}^{A}\sigma T_a^4 \,.$$

Le deuxième terme est l'énergie radiative renvoyée par l'atmosphère. ϕ est aussi l'énergie réémise par le sol, telle que $\phi = \sigma T_S^4$. L'équilibre thermique de l'atmosphère s'écrit (en n'oubliant pas que l'atmosphère émet vers le haut et vers le bas)

$$2\sigma a_{\mathrm{IR}}^{A} T_a^4 = a_{\mathrm{V}}\Phi_0 + a_{\mathrm{IR}}^{A}\phi \,.$$

On peut aussi, en remplacement de cette relation, écrire l'équilibre entre les flux entrant et sortant au sommet de l'atmosphère :

$$\Phi_0 = a_{\mathrm{IR}}^{A}\sigma T_a^4 + (1 - a_{\mathrm{IR}}^{A})\phi \,.$$

En combinant les relations on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma T_a^4 &= \frac{a_{\mathrm{V}} + a_{\mathrm{IR}}^{A}(1 - a_{\mathrm{V}})}{a_{\mathrm{IR}}^{A}(2 - a_{\mathrm{IR}}^{A})}\Phi_0 \\
\sigma T_S^4 &= \frac{2 - a_{\mathrm{V}}}{2 - a_{\mathrm{IR}}^{A}}\Phi_0 \\
G &= \frac{a_{\mathrm{IR}}^{A} - a_{\mathrm{V}}}{2 - a_{\mathrm{IR}}^{A}}\Phi_0 \,.
\end{aligned}$$

Application numérique :

$$T_a = \left(\frac{0{,}2 + 0{,}94 \times 0{,}8}{0{,}94 \times 1{,}06} \times \frac{240 \times 10^8}{5{,}67}\right)^{1/4} = 252 \text{ K} \,.$$

$T_S = 291$ K et $G = 167{,}5$ W m^{-2}.