~~équilibre~~ ~~linéarisation~~

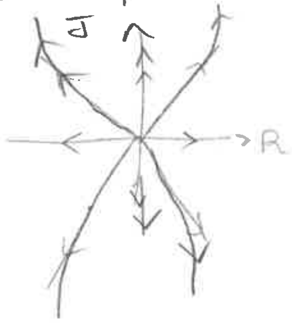
TP math. Intro. stabilité. toutes les trajectoires convergent

(II.) $X = \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \dot R \\ \dot J \end{pmatrix} = \dot X = AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aR + bJ \\ cR + dJ \end{pmatrix}$

1) Cas diagonal : a). $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 3, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\left(A = PDP^{-1}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right)$

- Tangentes aux trajectoires dans le diagramme de phase en $X = (R, J)$ données par AX

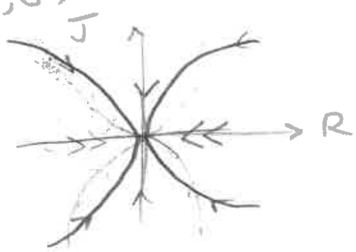


- Exemple de trajectoire si condition initiale $X(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_{eq} = 0$ est instable. Toutes les trajectoires divergent.

b) . $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 & X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 & X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

- Tangentes aux trajectoires dans le diagramme de phase en $X = (R, J)$ données par AX.

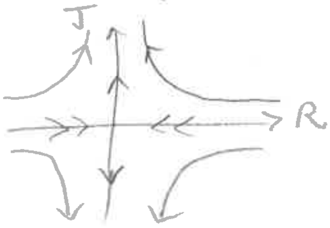


- Exemple de trajectoire si $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_{eq} = 0$ est stable. Toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre

c) • $A = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -2 & X_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \lambda_2 = 1 & X_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

• Tangentes aux trajectoires dans le diagramme de phase données par AX



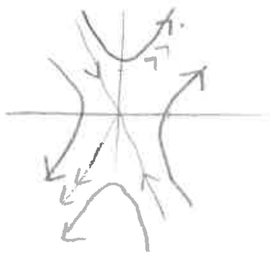
• Exemple de trajectoire si $X(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ X_{eq} est instable, car toutes les trajectoires ne convergent pas vers l'origine.
En fait toutes les trajectoires divergent sauf pour $X(0) /\!/ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

2) Cas général :

a) • $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 3, & X_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ \lambda_2 = -1, & X_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\end{cases}$

• Diagramme de phase

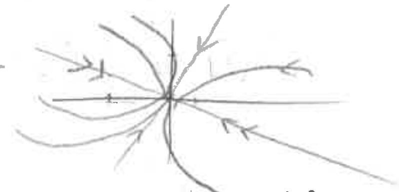


• Exemple de trajectoire si $X(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ * erreur numérique $\Rightarrow$ diverge après 0

$\Rightarrow$ X_{eq} est instable. Seules les trajectoires de condition initiale $X(0) /\!/ X_2$ convergent vers l'origine, toutes les autres divergent.

b) • $A = \begin{pmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -1, & X_1 = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ \lambda_2 = -4, & X_2 = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

• Diagramme de phase



• Exemple de trajectoire si $X(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ X_{eq} est stable, toutes les trajectoires convergent vers l'origine

TP3

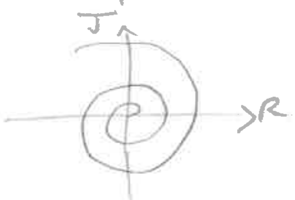
c) Une condition qui semble se dégager pour la stabilité est $\lambda_{1,2} < 0$

3) Cas général avec valeurs propres complexes.

a). $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i, & X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i = \overline{\lambda_1}, & X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \overline{X_1} \end{cases}$

(Rk : si $\underset{\uparrow \mathbb{R}^{n \times n}}{A} X = \lambda X \Rightarrow \overline{A}\,\overline{X} = A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X} \Rightarrow \overline{\lambda}$ valeur propre avec vecteur propre $\overline{X}$.)

- Tangentes aux trajectoires dans le diagramme de phase en X données par AX :



- Exemple de trajectoire si $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_{eq}$ est <u>stable</u>. Toutes les trajectoires convergent vers l'origine.

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2} \in \mathbb{C}$ si $-4 < \alpha < 4$

$-4 < \alpha < 4$

- Comportement selon α :
  - ↳ diag phase
  - . Exemples de traj
  - . stabilité

$\rightarrow \begin{cases} -4 < \alpha < 0 \Rightarrow Re < 0 \Rightarrow \text{spirales convergent vers 0 } \underline{\text{STABLE}} \\ \alpha = 0 \Rightarrow \in i\mathbb{R} \Rightarrow \text{cercles } \underline{\text{INSTABLE}} \text{ ~~erreur~~ } \Rightarrow \text{nor cercle} \\ 0 < \alpha < 4 \Rightarrow Re > 0 \Rightarrow \text{spirales divergent. } \underline{\text{INSTABLE}} \end{cases}$

c) Une condition qui semble se dégager pour la stabilité est $Re(\lambda_{1,2}) < 0$

Chaos on a strange attractor.

LTP4

§4.2. yes the motion is aperiodic, never crosses itself.

- $Y(t)$ looks chaotic and unpredictable
- → butterfly pattern

§4.3. Avec des conditions initiale differents de $\varepsilon = 10^{-6}$, la distance croît exponentiellement (ligne en logy plot), et diverge en 25 jours (difference de 10).

Si $\varepsilon = 10^{-4}$, la croissance est également exponentielle (même pente) et diverge en 20 jours.

Si $\varepsilon = 10^{-8}$, divergence en > 30 jours.

. When heated below, the atmosphere start to convect, with 2 counter rotating rolls.