

## **III. Ecoulement initial, mécanisme d'ajustement d'un front de densité.**

III.0 Un front « simple », comment s'ajuste-t-il ?

III.1 Stratification océanique

III.2 Modèle couche-mince unidimensionnel  
en rotation

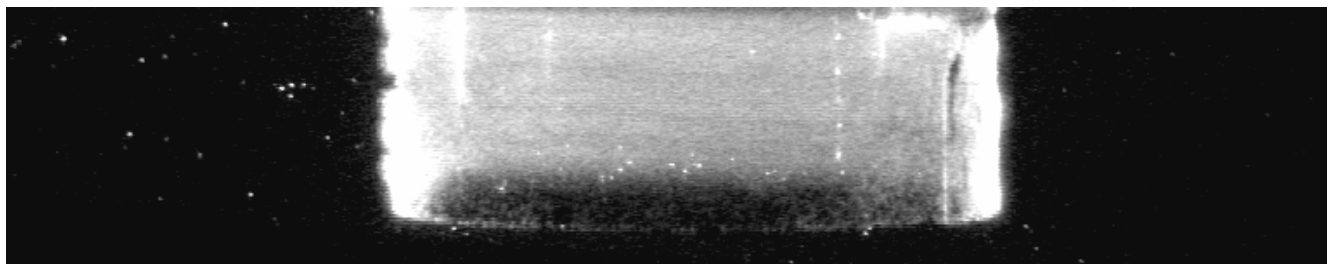
III.3 Lois de conservations

III.4 Existe-il une solution stationnaire ?

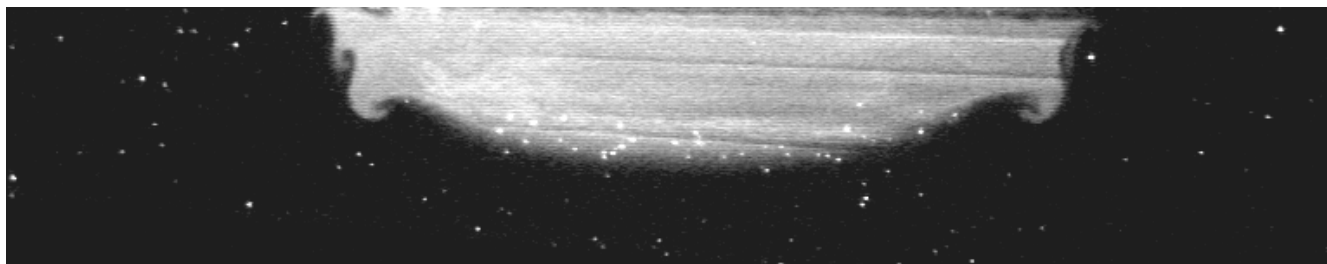
III.5 Bilan d'énergie

III.6 Dynamique instationnaire, ondes

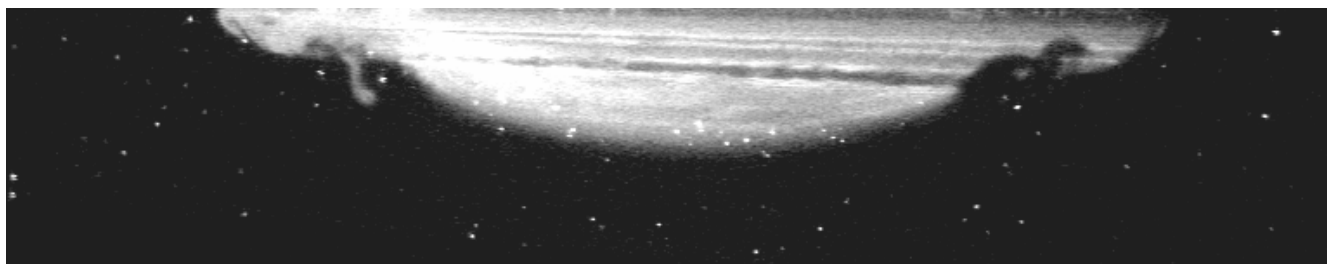
Evolution d'un front de densité dans un référentiel tournant.



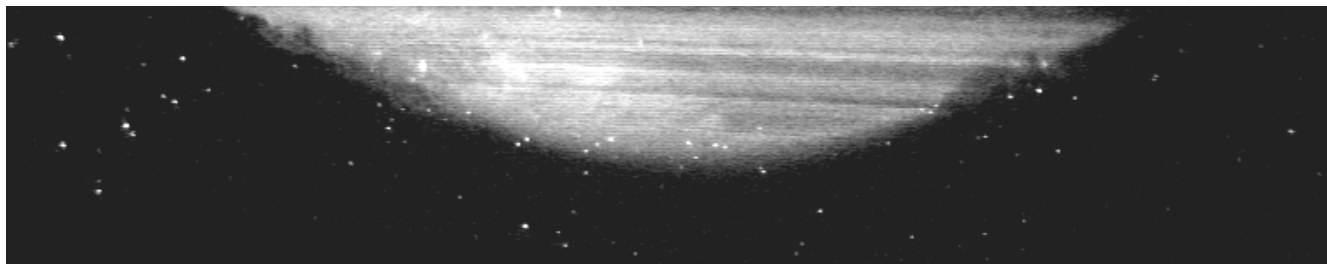
t = 0



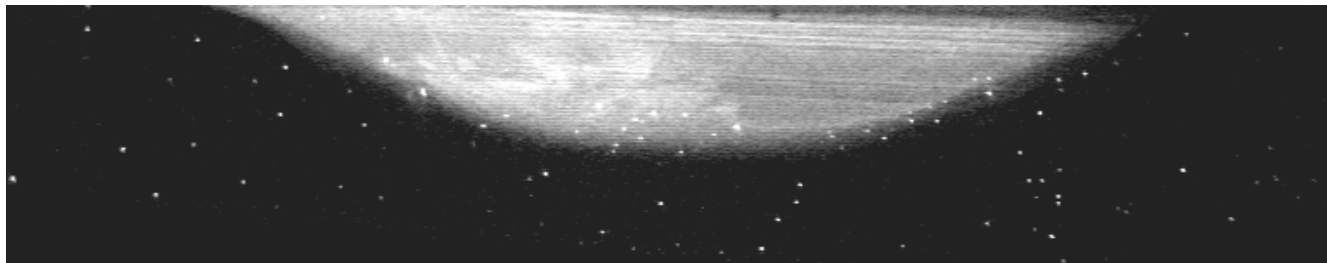
t=0.5s



t=1.5s



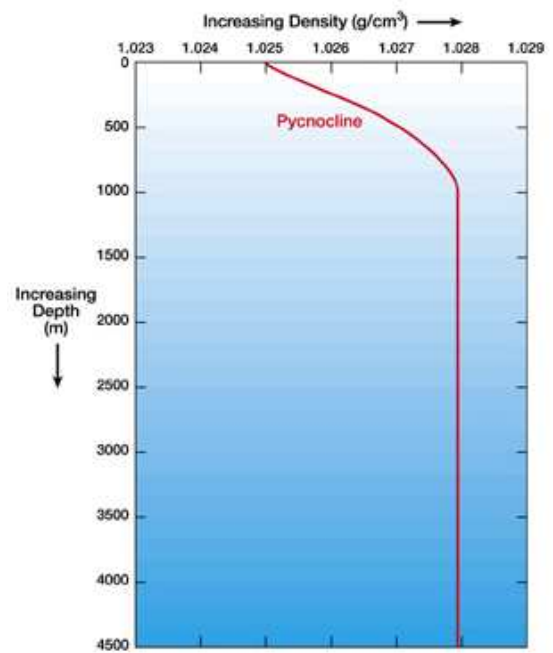
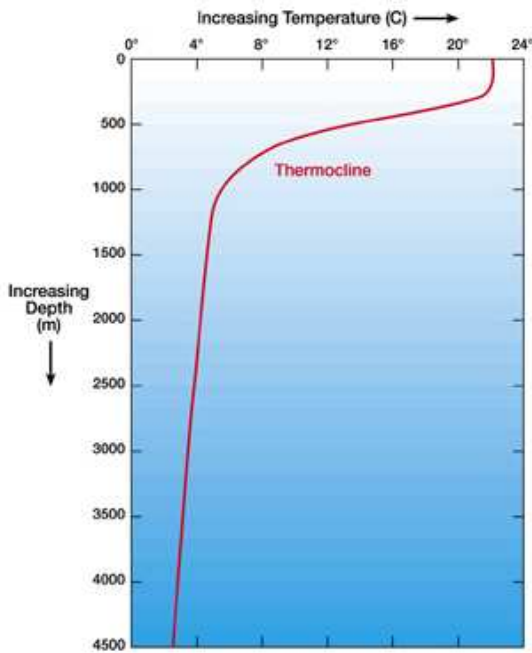
t=4s



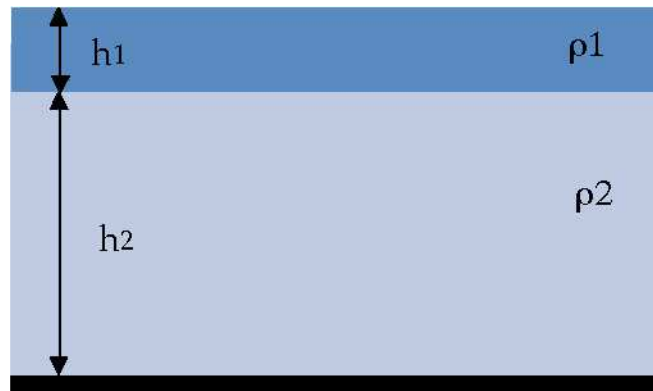
t=8

Equilibre ? Lequel ? Quel bilan d'énergie ?

Quel modèle utiliser ?



En première approximation : la stratification océanique peut être représentée par un modèle de deux couches minces



Euler

$$\rho_i (D^i_t u_i - f v_i) = -\partial_x \pi_i \tag{1.a}$$

$$\rho_i (D^i_t v_i + f u_i) = -\partial_y \pi_i \tag{1.b}$$

Conservation masse

$$D^i_t h_i + h_i (\partial_x u_i + \partial_y v_i) = 0 \tag{1.c}$$

Continuité de pression à l'interface

$$\pi_1 - \pi_2 = \rho_1 g^* h(x, y, t) \tag{1.d}$$

avec la gravité réduite  $g^* = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$  et  $D^i_t = \partial_t + u_i \partial_x + v_i \partial_y$

Dans l'hypothèse où  $h_2 \gg h_1$  on néglige la dynamique dans la couche profonde :  $u_2 \approx 0$   $v_2 \approx 0$   $\pi_2 \approx 0$ .

Ce qui conduit au modèle couche mince à gravité réduite (*i.e. shallow water equations on f-plane, Gill p.191*) où on remplace  $g$  par  $g^*$ .

Pour obtenir un système d'équations unidimensionnel analogue à une condition de **symétrie circulaire** (*celle que l'on étudiera au laboratoire*) on impose:  $\partial_y = 0$   $v(x=0) = 0$   $\partial_x h(x=0) = 0$ .

Ce type d'approximation permet de conserver les coordonnées cartésiennes afin de simplifier les calculs.

On se ramène donc à un modèle:

## **COUCHE MINCE UNIDIMENSIONNEL EN ROTATION**

$$D_t u - fv = -g^* \partial_x h \quad (2.a)$$

$$D_t v + fu = 0 \quad (2.b)$$

$$D_t h + h \partial_x u = 0 \quad (2.c)$$

avec  $D_t = \partial_t + u \partial_x$

## Lois de conservation

### Volume:

$$V = \int h dx$$

en utilisant (2.c)

$$\partial_t V = \int \partial_t h dx = - \int \partial_x (hu) dx = 0 \quad (3)$$

### Energie:

Soit  $K$  ( $U$ ) l'énergie cinétique (potentielle) du système

$$K = \int \frac{1}{2} (u^2 + v^2) h dx \quad U = \int \frac{1}{2} g^* h^2 dx$$

$$\partial_t K = \int \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \partial_t h dx + \int (u \partial_t u + v \partial_t v) h dx$$

$$\partial_t K = - \int \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \partial_x (hu) dx$$

$$- \int u h (u \partial_x u - f v + g^* \partial_x h) dx - \int v u h (\partial_x v + f) dx$$

en intégrant par partie la première intégrale

$$\partial_t K = - \int g^* u h \partial_x h dx = \int g^* h \partial_x (hu) dx = - \int g h \partial_t h dx$$

$$\partial_t K = - \partial_t U \quad (4)$$

### Vorticité potentielle:

à partir de (2.b) on obtient

$$D_t (f + \partial_x v) + (f + \partial_x v) \partial_x u = 0$$

en combinant avec (2.c)

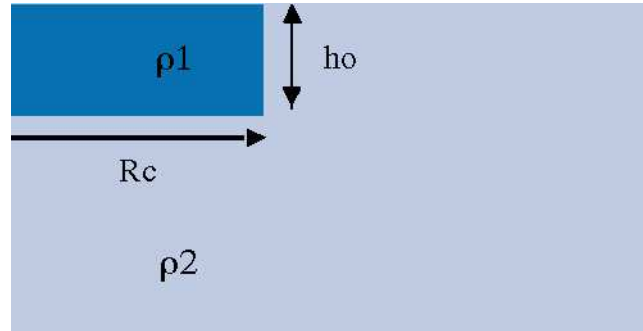
$$h D_t (f + \partial_x v) - (f + \partial_x v) D_t h = 0$$

ce qui conduit à **la conservation lagrangienne de la vorticité potentielle**  $Q$

$$D_t [(f + \partial_x v) / h] = D_t Q = 0 \quad (5)$$

## Existe-il une solution stationnaire ?

Qui résulte de la condition initiale  $Q(x)=f/h_0$   $x < R_0$



Une solution stationnaire vérifie l'équilibre géostrophique:

$$\partial_t v = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{et} \quad v = (g^*/f) \partial_x h \quad (6)$$

La conservation de la vorticité potentielle conduit à :

$$f + \partial_x v = (f/h_0)h = Q_0 h$$

$$h - R_d^{*2} \partial_x^2 h = h_0 \quad (7)$$

avec le rayon de déformation  $R_d^* = \sqrt{g^* h_0} / f$ .

Conditions limites pour résoudre l'équation du second ordre (7)

$$h(x_0) = 0 \quad \text{le front se propage à une distance finie} \quad (8.a)$$

$$\partial_x h(x=0) = 0 \quad \text{vitesse nulle en } x=0 \quad (8.b)$$

La solution de l'équation (7) avec les C.L. (8) s'écrit:

$$\begin{aligned} h(x) &= h_o \left[ 1 - \operatorname{ch}(x/R_d^*) / \operatorname{ch}(x_o/R_d^*) \right] & x \leq x_o \\ h(x) &= 0 & x > x_o \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v(x) &= -fR_d \operatorname{sh}(x/R_d^*) / \operatorname{ch}(x_o/R_d^*) & x \leq x_o \\ v(x) &= 0 & x > x_o \end{aligned} \quad (10)$$

La distance de déplacement du front s'obtient à partir (3)

$$\begin{aligned} h_o R_o &= \int_0^{x_o} h dx = h_o x_o - h_o R_d^* \operatorname{th}(x_o/R_d^*) \\ x_o &= R_o + R_d^* \operatorname{th}(x_o/R_d^*) \end{aligned} \quad (11)$$

Deux cas limite:

**$R_o \gg R_d^*$**

$$x_o \approx R_o + R_d^* \quad \text{le front se propage sur la distance } R_d^* \ll R_o$$

**La rotation limite la propagation du front de densité**

**$R_o \ll R_d^*$**

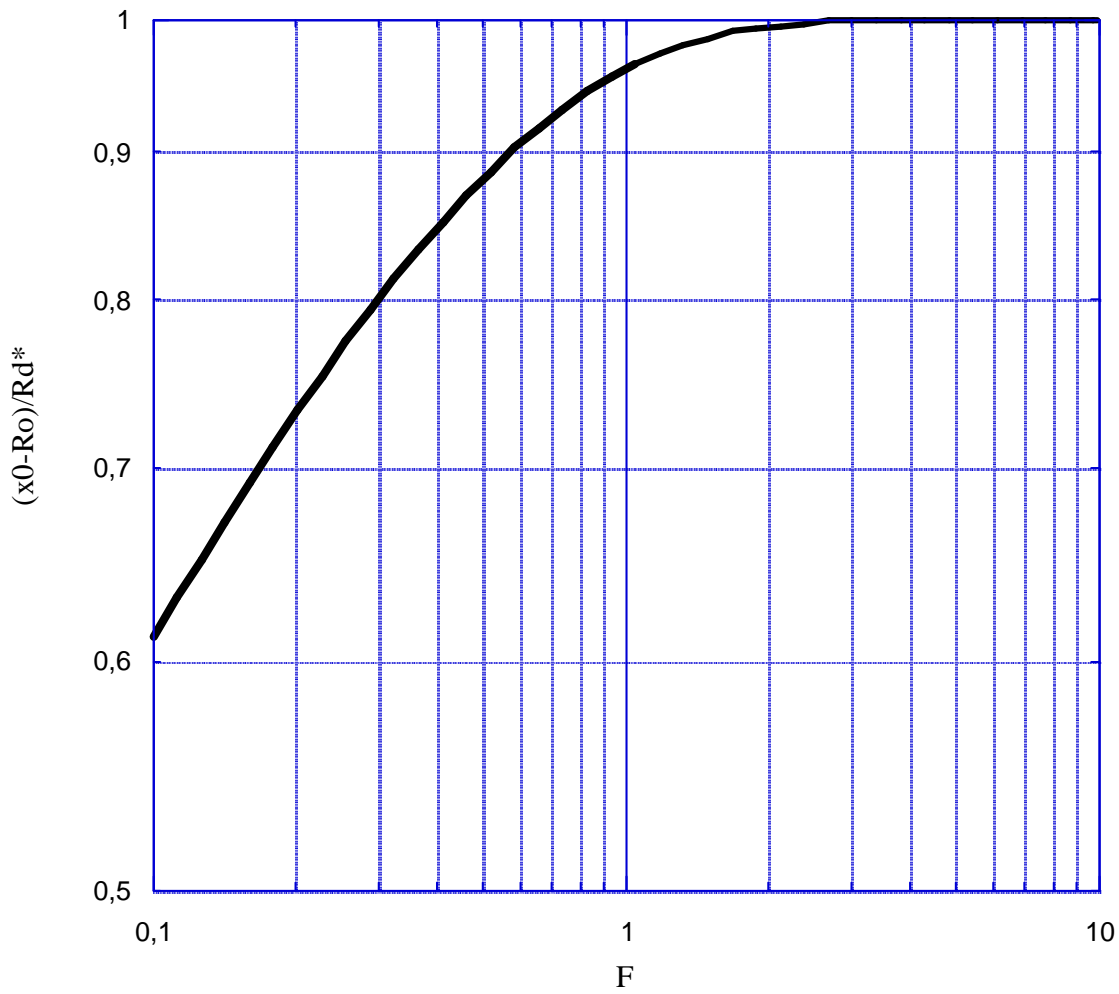
$$x_o \approx \sqrt[3]{R_o R_d^{*2}} \quad \text{le front se propage sur une distance } \gg R_o$$

**L'effet de la rotation est très faible**

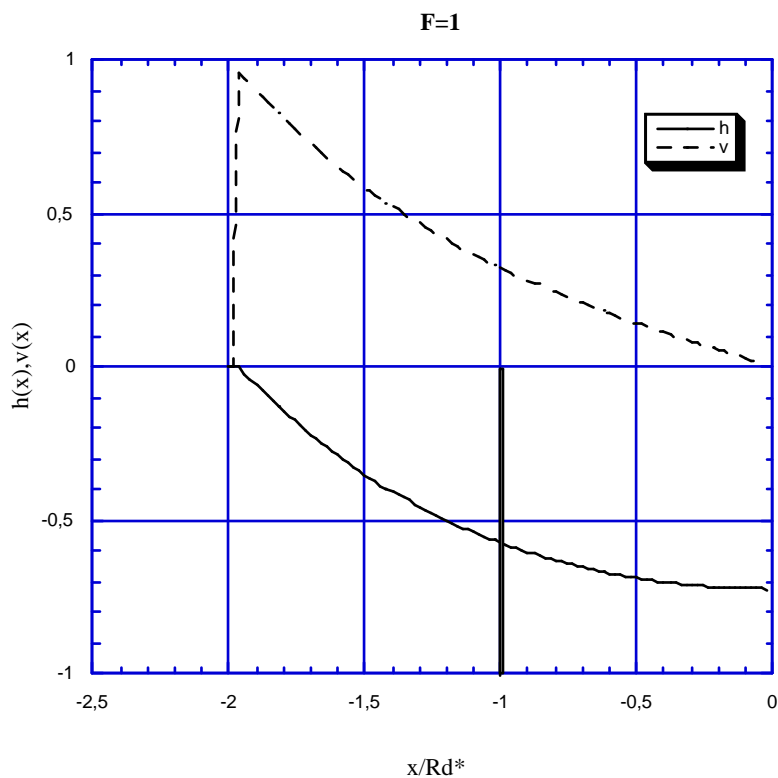
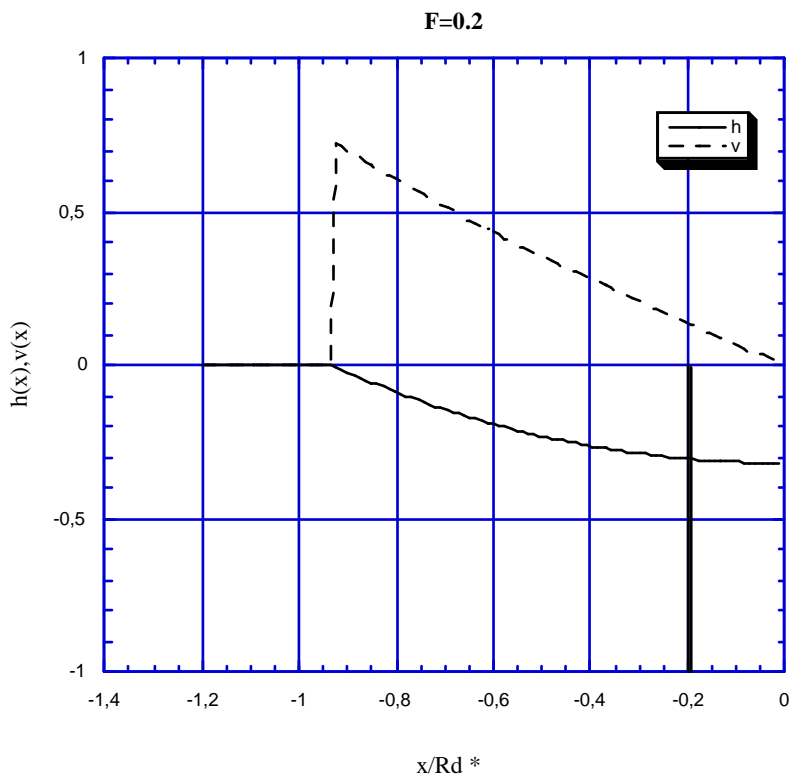
Pour les cas intermédiaires  $R_0 \sim R_d^*$  on introduit le paramètre  $F$

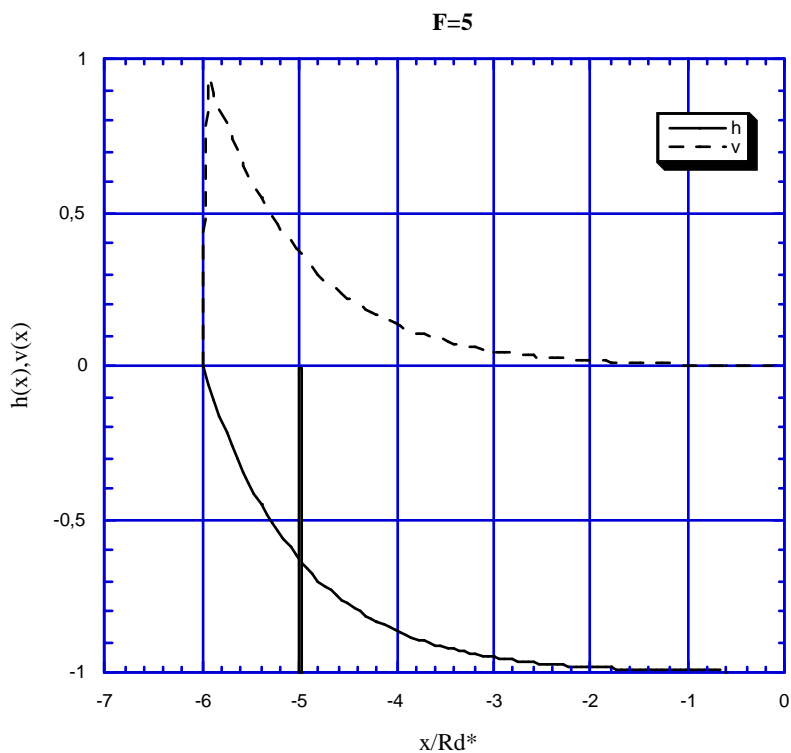
$$F = R_0 / R_d^*$$

Déplacement du front  $d = x_0 - R_0$  en fonction de  $F$



### Profils de $h$ , $v$ pour $F = 0.2, 1$ et $5$





- Que se passe-t-il avec le profil de vitesse en  $x_0$  ?
- Pour obtenir une solution physique que doit-on prendre en compte ?

## Bilan d'énergie

### Energie potentielle

$t=0$

$$U = \frac{1}{2} g^* h_o^2 R_o$$

$t>0$

$$U = \int_0^{x_o} \frac{1}{2} g^* h^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} g^* h_o^2 \int_0^{x_o} \left[ 1 - 2 \frac{\text{ch}(x/R_d^*)}{\text{ch}(x_o/R_d^*)} + \frac{\text{ch}^2(x/R_d^*)}{\text{ch}^2(x_o/R_d^*)} \right] dx$$

$$U = \frac{1}{2} g^* h_o^2 \left[ x_o - 2R_d^* \text{th}(x_o/R_d^*) + \frac{R_d^*}{2\text{ch}^2(x_o/R_d^*)} (x_o/R_d^* + \frac{1}{2} \text{sh}(2x_o/R_d^*)) \right]$$

$$U = U_0 - \frac{1}{4} g^* h_o^2 R_d^* \left[ \text{th}(x_o/R_d^*) - \frac{(x_o/R_d^*)}{\text{ch}^2(x_o/R_d^*)} \right] \quad (12)$$

### Energie cinétique

$$K = \int \frac{1}{2} (u^2 + v^2) h dx$$

$$K = \frac{1}{2} g^* h_o^2 R_d^* \int_0^{x_o} \frac{\text{sh}^2(x/R_d^*)}{\text{ch}^2(x_o/R_d^*)} \left[ 1 - \frac{\text{ch}(x/R_d^*)}{\text{ch}(x_o/R_d^*)} \right] dx$$

$$K = \frac{1}{2} g^* h_o^2 R_d^* \left[ \frac{1}{2} \text{th}(x_o/R_d^*) - \frac{1}{3} \text{th}^3(x_o/R_d^*) - \frac{(x_o/R_d^*)}{2\text{ch}^2(x_o/R_d^*)} \right] \quad (13)$$

**Dans la limite  $R_o \gg R_d^*$** 

$$\frac{(x_o / R_d^*)}{2ch^2(x_o / R_d^*)} \rightarrow 0 \quad \& \quad \text{th}(x_o / R_d^*) \rightarrow 1$$

il en résulte:

$$U \approx U_0 - \frac{1}{4} g^* h_o^2 R_d^* \quad \& \quad K \approx \frac{1}{12} g^* h_o^2 R_d^*$$

On remarque que suite à l'ajustement géostrophique:

$$U / K = 6 \left[ R_o / R_d^* - \frac{1}{2} \right] \gg 1$$

et

$$\Delta U + \Delta K \approx -\frac{1}{6} g^* h_o^2 R_d^* < 0$$

**Où est passée l'énergie !?**

## Dynamique instationnaire

Jusqu'à présent nous avons cherché une solution stationnaire du système (2). Une première approche de la dynamique transitoire consiste à résoudre le problème de Cauchy pour le système (2) linéarisé autour de l'état initial.

On se ramène au système d'équations:

$$\partial_t u - fv = -g^* \partial_x \eta \quad (2'.a)$$

$$\partial_t v + fu = 0 \quad (2'.b)$$

$$\partial_t \eta + h_o \partial_x u = 0 \quad (2'.c)$$

en combinant (2'.a) et (2'.b) on fait apparaître l'équation des ondes de Poincaré

$$\partial_{t^2} u + f^2 u - g^* h_o \partial_{x^2} u = 0 \quad (14.a)$$

ayant la relation de dispersion :

$$\omega^2 = f^2 + g^* h_o k^2 = f^2 [1 + (R_d^* k)^2] \quad (14.b)$$

**L'énergie "manquante" entretient un champ  
d'ondes inertio-gravitationnelles ?**