

IV. Instabilité barocline

IV.1 Méandres et tourbillons générés par les courants océaniques

IV.2 Quelques rappels

IV.3 Modes Barotrope / Barocline

IV.4 Critères de stabilité : cas général.

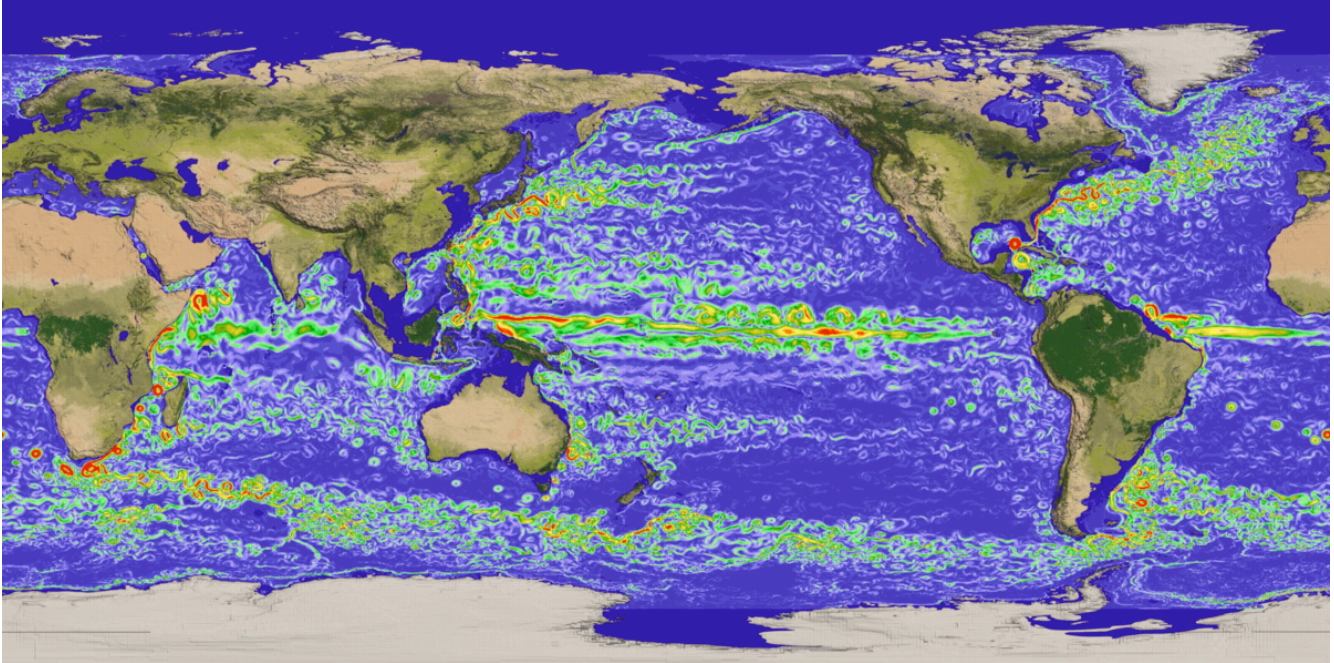
IV.5 Mécanisme physique de l'instabilité barocline.

IV.6 Modèle de Phillips : stabilité linéaire.

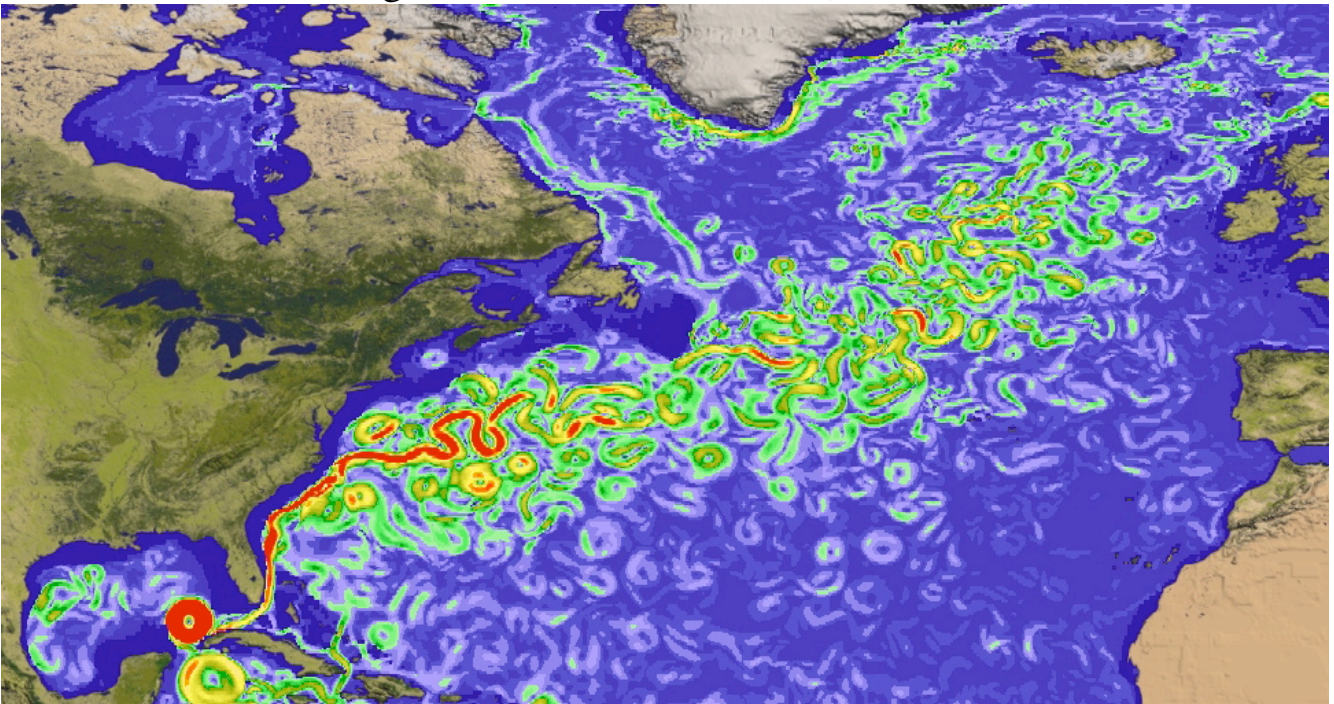
IV.7 Instabilité de cisaillement barotrope

Pourquoi les courants océaniques forment-ils des méandres et des tourbillons ?

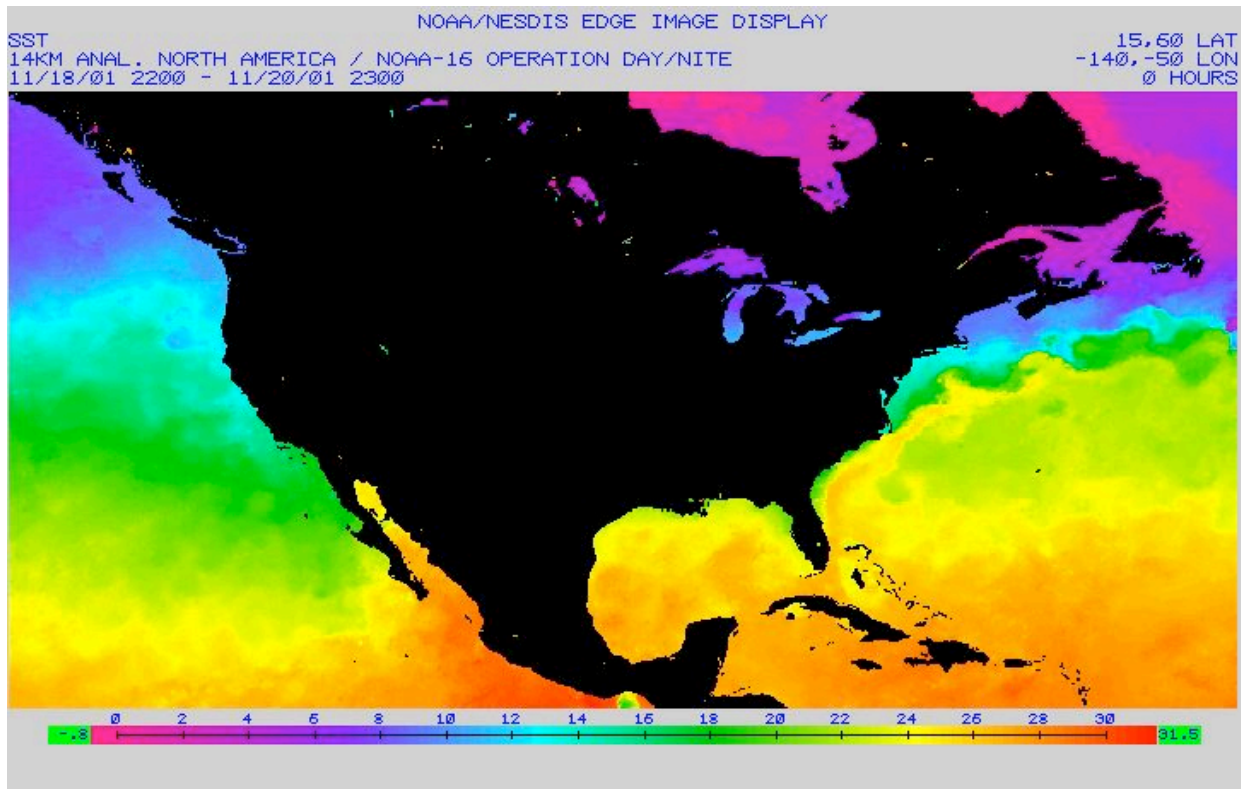
Simulations numériques sur le « *Earth-Simulator* »



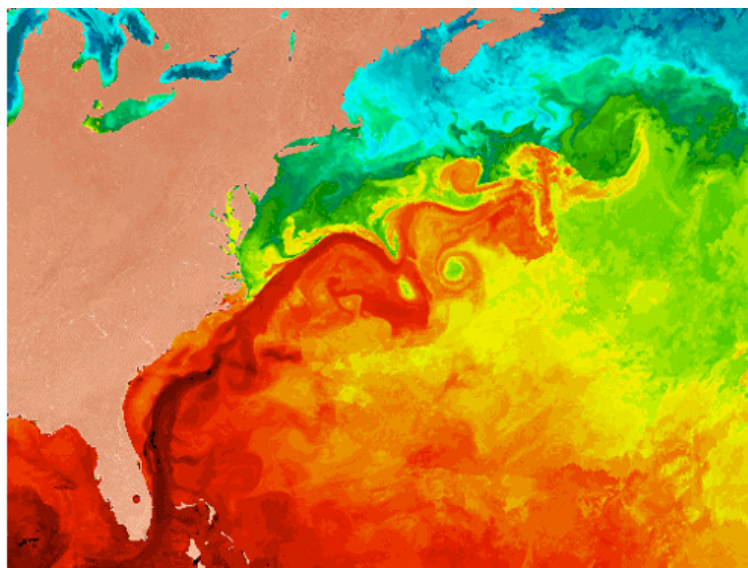
Modèle de circulation générale haute résolution (~10kmx10km)



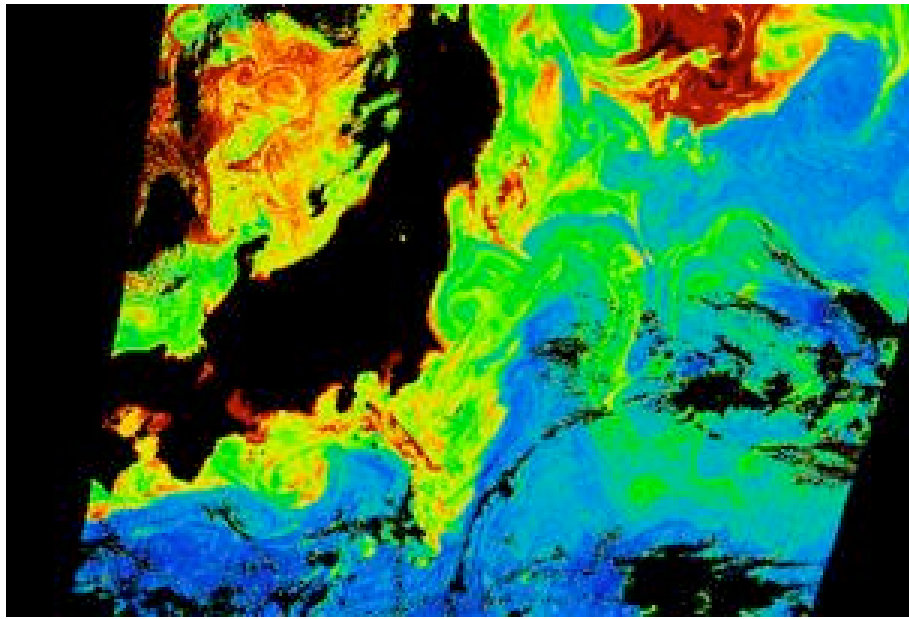
<http://www.es.jamstec.go.jp/esc/research/AtmOcn/index.en.html>



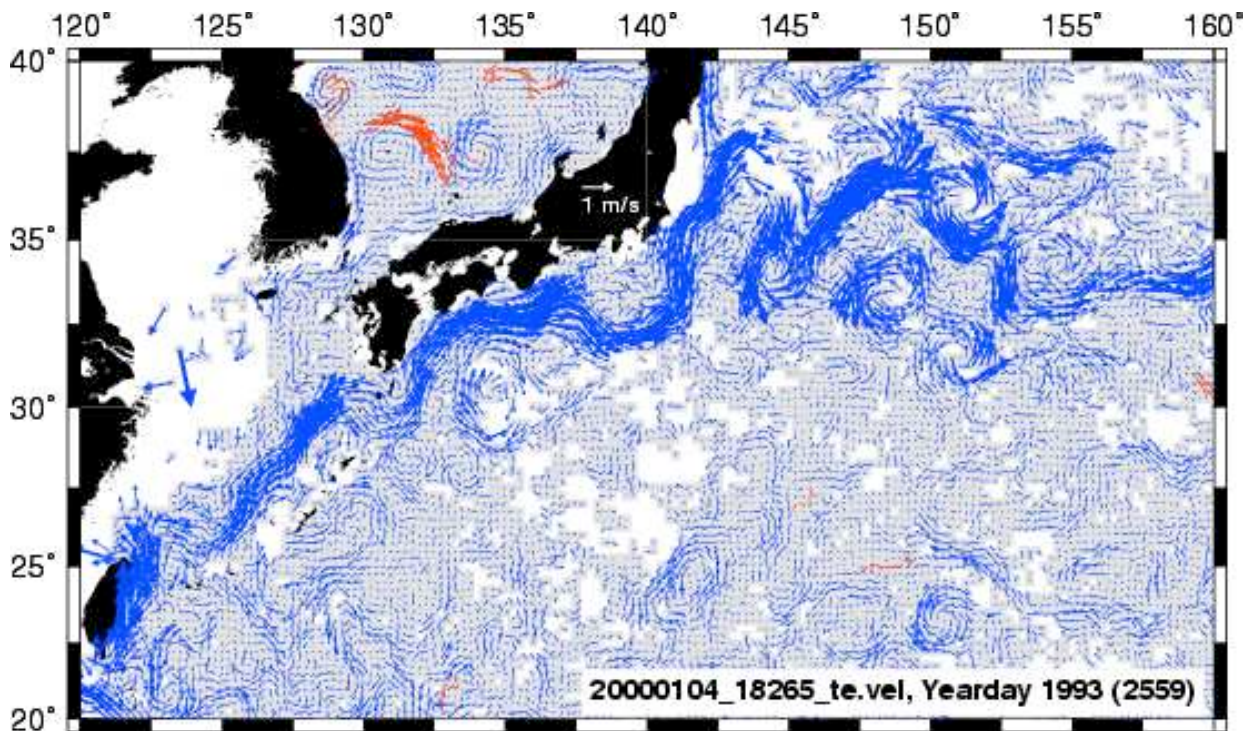
Gulf-Stream (Température de surface)



Kuroshio

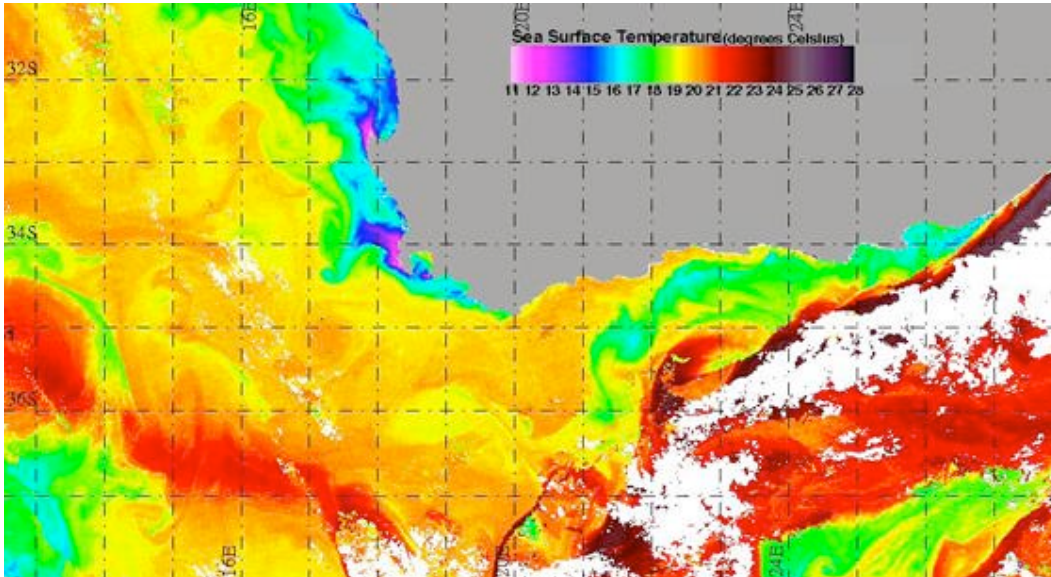


Phytoplancton en fausses couleurs



Champ de vitesse déduit de la hauteur de la mer (TOPEX-Poseidon)

Le courant des aiguilles



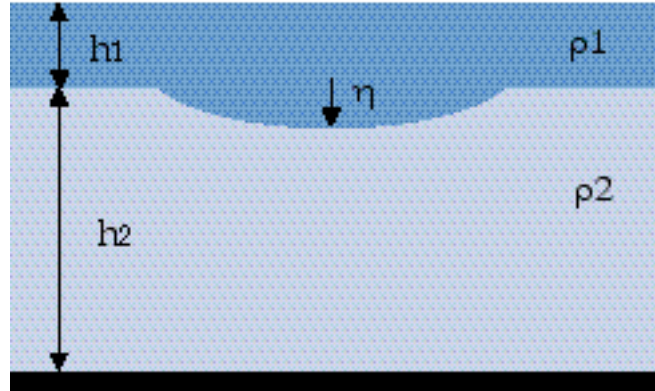
Afrique du Sud : Température de surface

On distingue ci-dessus :

- le courant chaud des aiguilles qui descend à l'Est
- un tourbillon de grande échelle qui se détache et se propage à l'Ouest
- une remonté d'eau froide (Upwelling) sur la côte Ouest : courant Benguela

Quelques rappels ... de dynamique quasi-geostrophique.

Une description **bi-couche** (c.f. 1.a,b,c,d dans III)



sans surface libre.

Conservation lagrangienne de la vorticité potentielle dans chaque couche.

En utilisant (1.a et 1.b) on élimine avec le rotationnel la variable de pression :

$$D^i \omega_i + (\omega_i + f)(\partial_x u_i + \partial_y v_i) = 0 \quad (15)$$

avec $\omega_i = \partial_x v_i - \partial_y u_i$ et $D^i_t = \partial_t + u_i \partial_x + v_i \partial_y$

Il en résulte, pour chaque couche :

$$D^i_t [(f + \omega_i) / h_i] = D_t Q_i = 0 \quad (16)$$

Approximation quasi-géostrophique

Une formulation adimensionnelle :

$$\begin{array}{ll}
 x,y & \rightarrow R_d^* = \sqrt{g^* H_1} / f \\
 u_1, v_1, u_2, v_2 & \rightarrow V \\
 t & \rightarrow R_d^* / V \\
 h_1, h_2 & \rightarrow H_1, H_2 \\
 \eta & \rightarrow \lambda H_1 \\
 \pi_1, \pi_2 & \rightarrow \rho g^* \lambda H_1
 \end{array}$$

avec $\gamma = \frac{H_1}{H_2} \approx 1$ et un développement asymptotique autour de

l'équilibre géostrophique $R_o = \frac{V}{f R_d^*} \ll 1$ et $\lambda \ll 1$

$$v_i = \partial_x \pi_i + O(R_o) \quad (17.a)$$

$$u_i = -\partial_y \pi_i + O(R_o) \quad (17.b)$$

$$h_1 = 1 + \lambda \eta + O(\lambda^2) \quad (18.a)$$

$$h_2 = 1 - \lambda \eta + O(\lambda^2) \quad (18.a)$$

$$\pi_1 - \pi_2 = \eta \quad (19)$$

avec $\lambda \approx R_o$

Il en résulte,

$$Q_1 = \frac{f}{H_1}(1 + R_o\omega_1 - \lambda\eta) + O(R_o) \quad (20)$$

$$Q_2 = \frac{f}{H_1}\gamma(1 + R_o\omega_2 + \lambda\gamma\eta) + O(R_o) \quad (21)$$

avec $\omega_i = \partial_x^2 \pi_i + \partial_y^2 \pi_i = \Delta\pi_i$

la conservation de la vorticité potentielle s'écrit alors :

$$D_t^i Q_i = \partial_t Q_i + J(\pi_i, Q_i) + O(R_o) \quad (22)$$

en utilisant le Jacobien $J(A,B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_x B \partial_y A$

le système d'équation QG bi-couche :

$$\partial_t [\Delta\pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)] + J(\pi_1, \Delta\pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)) = 0 \quad (23)$$

$$\partial_t [\Delta\pi_2 + \gamma(\pi_1 - \pi_2)] + J(\pi_2, \Delta\pi_2 + \gamma(\pi_1 - \pi_2)) = 0 \quad (24)$$

remarque : la dynamique QG évolue sur une échelle de temps lente... par rapport à la fréquence inertielle

$$t \approx \frac{R_d^*}{V} \approx R_o^{-1} f^{-1} \gg f^{-1}$$

Modes barotrope / barocline

Linéarisation du système d'équation (23,24) :

$$\partial_t [\Delta \pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)] = 0 \quad (25)$$

$$\partial_t [\Delta \pi_2 + \gamma (\pi_1 - \pi_2)] = 0 \quad (26)$$

et diagonalisation :

$$\partial_t \Delta \Pi = 0 \quad (27)$$

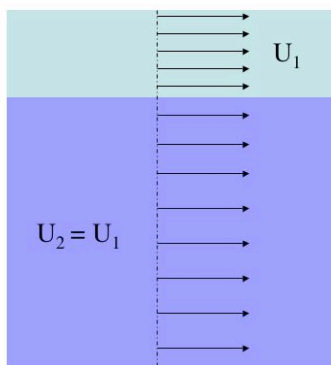
$$\partial_t [\Delta \eta - (1 + \gamma) \eta] = 0 \quad (28)$$

avec $\Pi = \pi_2 + \gamma \pi_1$ et $\eta = \pi_1 - \pi_2$.

Mode barotrope Π

$$\eta = 0 \quad \& \quad \Pi \neq 0$$

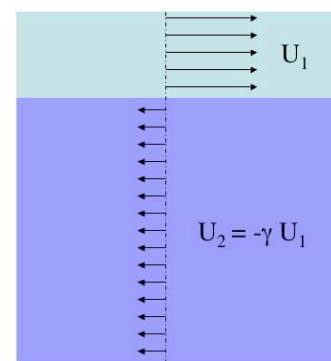
$$\pi_2 = \pi_1 \Rightarrow V_2 = V_1$$



Mode barocline η

$$\Pi = 0 \quad \& \quad \eta \neq 0$$

$$\pi_2 = -\gamma \pi_1 \Rightarrow V_2 = -\gamma V_1$$



Les modes barotropes et baroclines sont linéairement indépendants mais non-linéairement couplés.

Critères de stabilité en QG bi-couche : écoulement unidirectionnel

On décompose entre l'écoulement de base indicé 0 qui ne varie que selon y et une perturbation φ_i :

$$\pi_i = \pi^0_i(y) + \varphi_i \quad (29)$$

$$u_i = U^0_i(y) - \partial_y \varphi_i \quad (30.a)$$

$$v_i = \partial_x \varphi_i \quad (30.b)$$

la vorticité potentielle s'écrit (petit rappel) :

$$Q_1 = \frac{f}{H_1} \left[1 + R_o Q^0_1(y) + R_o q_1 \right] \quad (31.a)$$

$$Q_2 = \frac{f}{H_1} \gamma \left[1 + R_o Q^0_2 + R_o q_2 \right] \quad (31.b)$$

avec :

$$q_1 = \Delta \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (32.a)$$

$$q_2 = \Delta \varphi_2 + \gamma (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (32.b)$$

et

$$Q^0_1(y) = -\partial_y U^0_1 - (\pi^0_1 - \pi^0_2) \quad (33.a)$$

$$Q^0_2(y) = -\partial_y U^0_2 + \gamma (\pi^0_1 - \pi^0_2) \quad (33.b)$$

On linéarise le système d'équation (22) autour de l'état de base $\varphi_i \ll \pi_i^0$

$$\partial_t q_i + U_i^0 \partial_x q_i + \partial_x \varphi_i \partial_y Q_i^0 = 0 \quad (34)$$

L'invariance par translation selon x et t incite à décomposer la perturbation en Fourier:

$$\varphi_1 = \Psi_1(y) e^{ik(x-ct)}, \quad \varphi_2 = \Psi_2(y) e^{ik(x-ct)}$$

le système d'équation (50) se ramène ainsi à :

$$(U_i^0 - c) q_i + \Psi_i \partial_y Q_i^0 = 0 \quad (35)$$

$$(U_1^0 - c) \left(\partial_{y^2} \Psi_1 - k^2 \Psi_1 - (\Psi_1 - \Psi_2) \right) + \Psi_1 \partial_y Q_1^0 = 0 \quad (36.a)$$

$$(U_2^0 - c) \left(\partial_{y^2} \Psi_2 - k^2 \Psi_2 + \gamma (\Psi_1 - \Psi_2) \right) + \Psi_2 \partial_y Q_2^0 = 0 \quad (36.b)$$

Une **condition nécessaire d'instabilité** peut être obtenue à partir du système ci-dessus en cherchant une condition intégrale (principe énergétique) sur la perturbation.

On multiplie (36.a) par le complexe conjugué $\gamma \Psi_1^*$ (36.b) par Ψ_2^* et on se ramène à :

$$\begin{aligned} & \gamma \Psi_1^* \partial_{y^2} \Psi_1 - \gamma k^2 |\Psi_1|^2 - \gamma \Psi_1^* (\Psi_1 - \Psi_2) + \\ & \Psi_2^* \partial_{y^2} \Psi_2 - k^2 |\Psi_2|^2 + \gamma \Psi_2^* (\Psi_1 - \Psi_2) + \\ & \gamma \frac{|\Psi_1|^2}{(U_1^0 - c)} \partial_y Q_1^0 + \frac{|\Psi_2|^2}{(U_2^0 - c)} \partial_y Q_2^0 = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ une solution localisée (non divergente en l'infini) vérifera toujours $\partial_y \Psi_i(y = -\infty) = \partial_y \Psi_i(y = +\infty) = 0$.

On intègre alors par partie les termes croisés du second ordre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\partial_y \Psi_i^* \partial_y \Psi_i + \Psi_i^* \partial_{y^2} \Psi_i \right] dy = \left[\Psi_i^* \partial_y \Psi_i \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (38)$$

et on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\gamma |\partial_y \Psi_1|^2 + |\partial_y \Psi_2|^2 + k^2 (\gamma |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) + \gamma |\Psi_1 - \Psi_2|^2 \right] dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\gamma (U_1^0 - c^*) \frac{|\Psi_1|^2}{|U_1^0 - c|^2} \partial_y Q_1^0 + (U_2^0 - c^*) \frac{|\Psi_2|^2}{|U_2^0 - c|^2} \partial_y Q_2^0 \right] dy \quad (39)$$

On décompose la partie imaginaire et la partie réelle de l'équation (39) pour obtenir des critères de stabilité ou conditions nécessaires pour avoir un écoulement instable.

CONDITION NECESSAIRE D'INSTABILITE BAROCLINE

$$\text{Im}(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\gamma \frac{|\Psi_1|^2}{|U_1^0 - c|^2} \partial_y Q_1^0 + \frac{|\Psi_2|^2}{|U_2^0 - c|^2} \partial_y Q_2^0 \right] dy = 0 \quad (40)$$

Pour qu'une perturbation instable ($\text{Im}(c)$ non-nulle) puisse exister il faut donc nécessairement que **les gradients de vorticité potentielle soient de signe opposés dans les deux couche.**

CONDITION NECESSAIRE D'INSTABILITE BAROTROPE

Dans le cas à une couche les seules instabilités qui peuvent exister sont des **instabilités correspondant à un cisaillement barotrope.** Ceci correspond à une généralisation du critère de Rayleigh (critère du point d'inflexion) **le gradient de vorticité potentielle doit changer de signe.**

$$\text{Im}(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{|\Psi_1|^2}{|U_1^0 - c|^2} \partial_y Q_1^0 \right] dy = 0 \quad (41)$$

Références :

Geophysical Fluid Dynamics, J. Pedlosky, Springer-Verlag, New-York, (1987) ISBN-0-387-96387-1

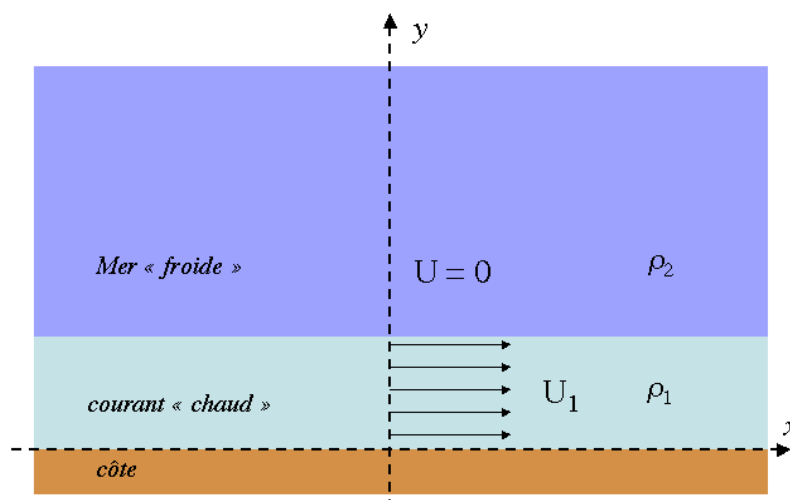
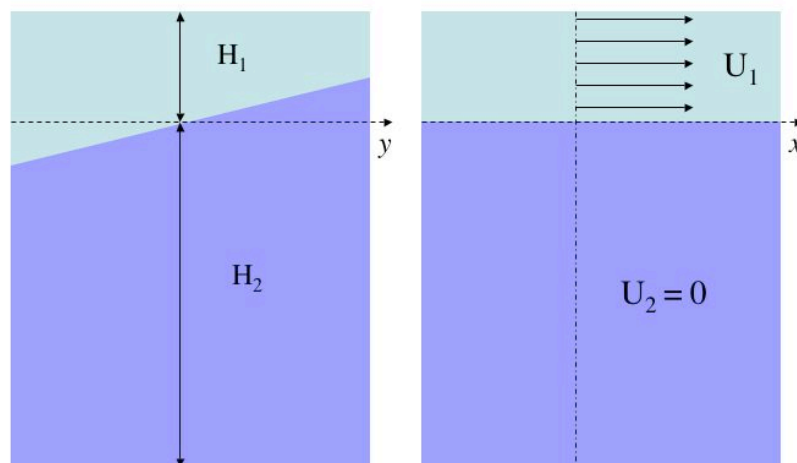
Généralisation du critère de Rayleigh dans *Hydrodynamic stability* Drazin & Read, Cambridge University Press (1981) ISBN-0-521-28980-7.

Le modèle de Phillips (version simplifié)

- *Geophysical Fluid Dynamics*, J. Pedlosky, Springer-Verlag, New-York, (1987) ISBN-0-387-96387-1

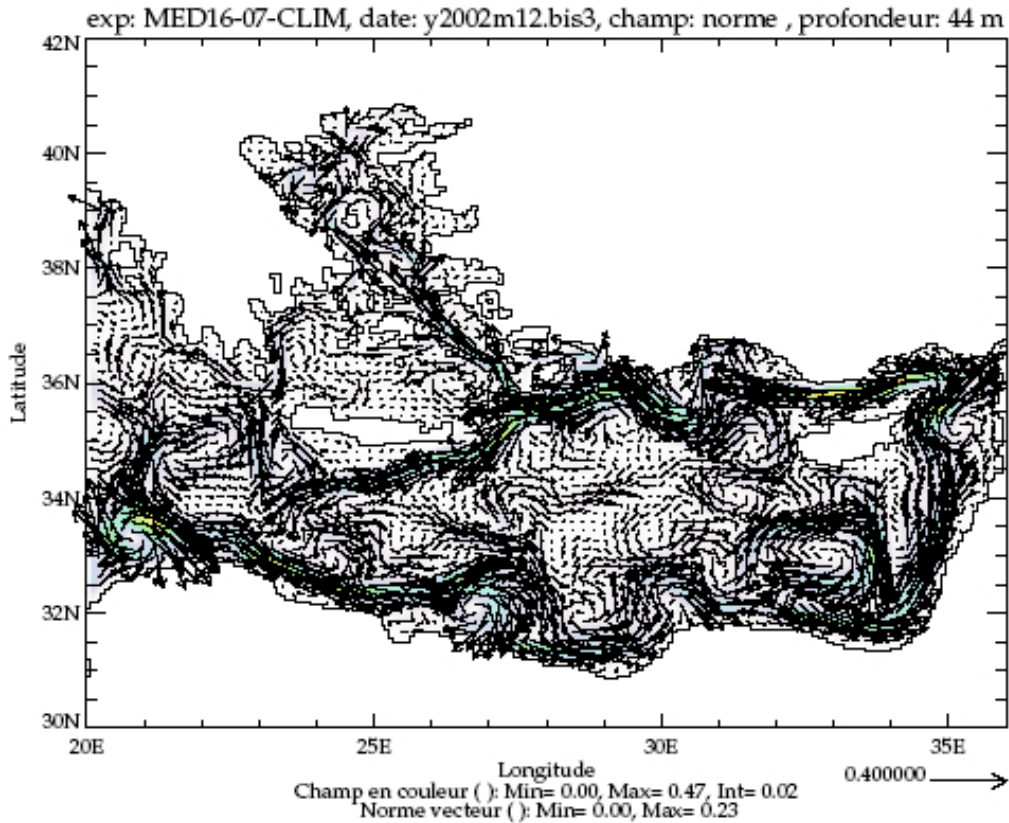
- N.A. Phillips "Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model, *Tellus* 6, 273-286 (1954).

On considère une configuration bi-couche quasi-géostrophique où la vitesse U_1 de la couche supérieure est uniforme tandis que la couche inférieure est au repos $U_2=0$.

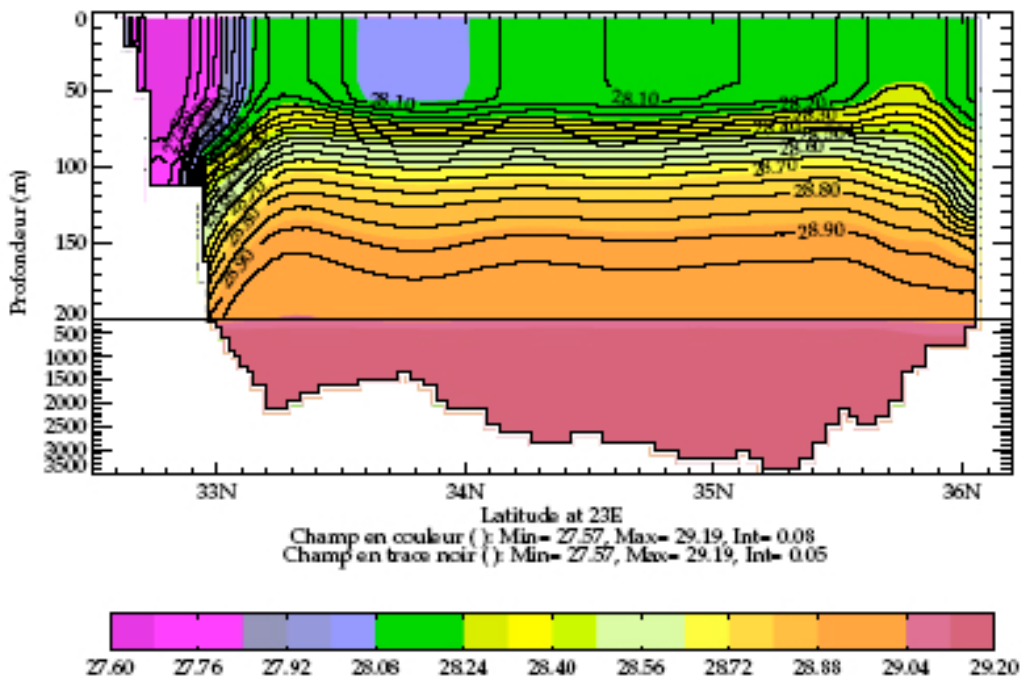


C'est une description simplifiée d'un courant océanique de surface.

Exemple : courant côtier en Méditerranée



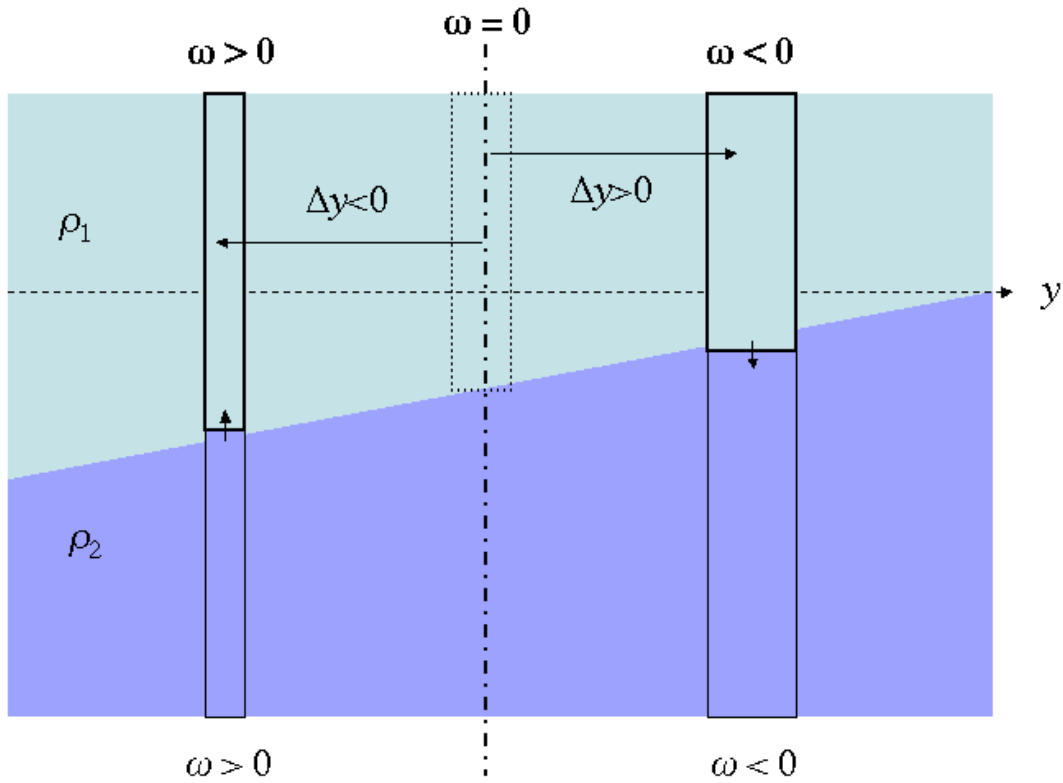
Champs de vitesse (ci-dessus) et coupe de densité (ci-dessous) extraites du modèle OPA (moyenne mensuelle)



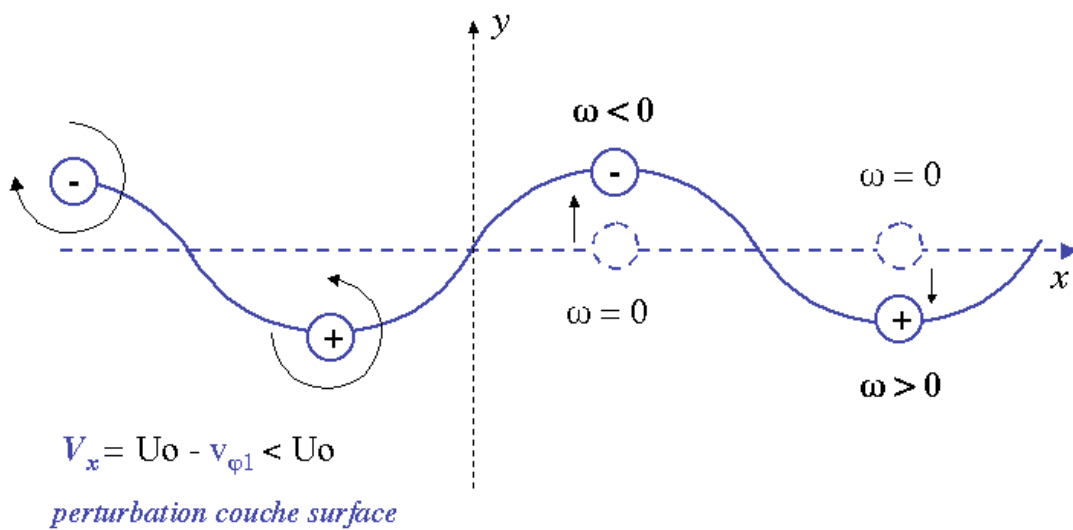
Vérifier en utilisant les critères généraux de stabilité démontré précédemment (40) et (41) que l'écoulement de Phillips est potentiellement instable.

Mais l'est-il réellement ?

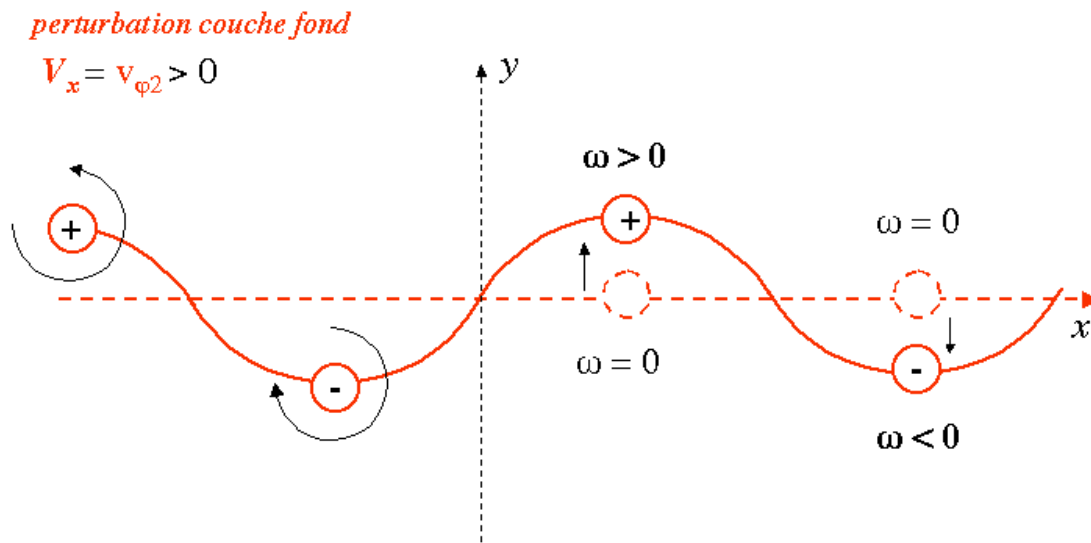
Mécanismes dynamique dans la couche de surface



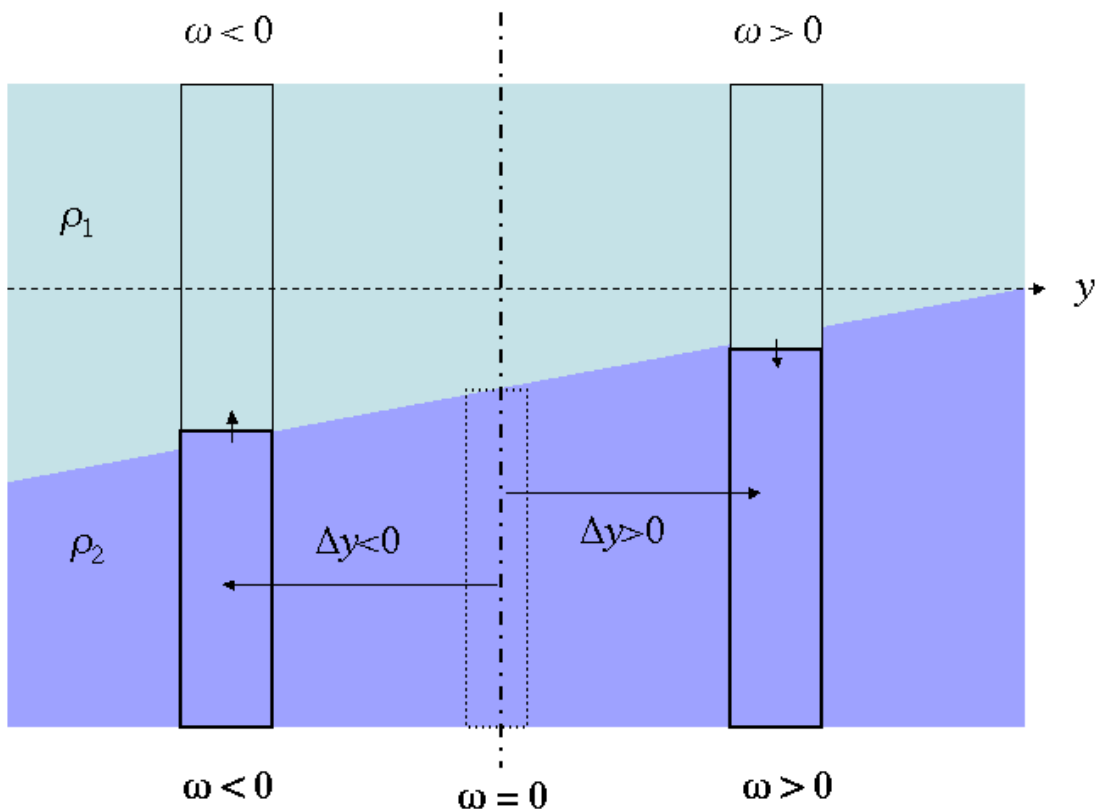
En utilisant la conservation de la vorticité potentielle les parcelles de la couche fluide de surface déplacées en $y > 0$ ($y < 0$) induisent une circulation anticyclonique (cyclonique) dans les deux couches.



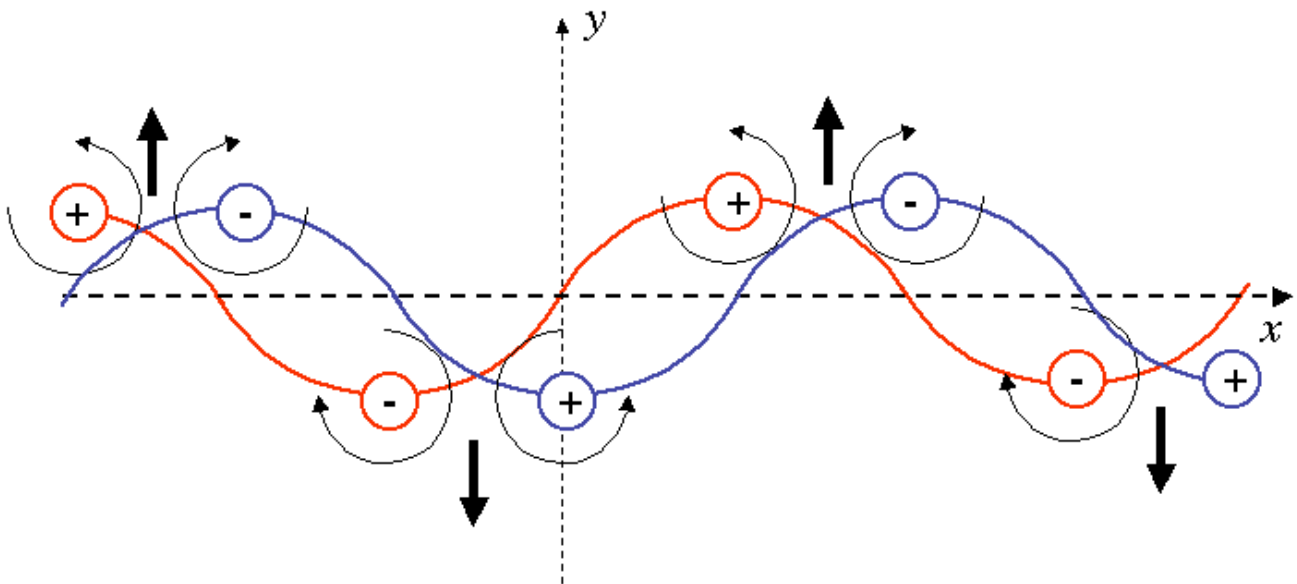
Mécanismes dynamique dans la couche du fond



En utilisant la conservation de la vorticité potentielle les parcelles de la couche fluide du fond déplacées en $y > 0$ ($y < 0$) induisent une circulation cyclonique (anticyclonique) dans les deux couches.



Mécanisme physique de l'instabilité barocline



Lorsque des petites perturbations ondulatoire le long de l'axe Ox de la couche de surface et de la couche du fond sont **en quadrature de phase**, l'amplitude de ces perturbation tendent à s'amplifier (dipôles selon Oy).

Analyse de stabilité linéaire

On linéarise le système d'équation (23,24) autour de l'état de base :

$$\pi_1 = -U_1 y + \varphi_1 \quad (42.a)$$

$$\pi_2 = \varphi_2 \quad (42.b)$$

avec $\varphi_1, \varphi_2 \ll U_1 y$

Cela conduit à

$$\partial_t q_1 + \partial_x \varphi_1 U_1 + U_1 \partial_x q_1 = 0 \quad (43)$$

$$\partial_t q_2 - \gamma \partial_x \varphi_2 U_1 = 0 \quad (44)$$

avec $q_1 = \Delta \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1$ et $q_2 = \Delta \varphi_2 + \gamma(\varphi_1 - \varphi_2)$

L'invariance par translation selon x et y incite à décomposer la perturbation en Fourier: $\varphi_1 = A_1 e^{i(kx+ly-\omega t)}$, $\varphi_2 = A_2 e^{i(kx+ly-\omega t)}$

Il en résulte

$$\left[(\omega - U_1 k)(K^2 + 1) + kU_1 \right] A_1 - (\omega - U_1 k) A_2 = 0 \quad (45)$$

$$\left[\omega(K^2 + \gamma) - k\gamma U_1 \right] A_2 - \omega\gamma A_1 = 0 \quad (46)$$

avec $K^2 = k^2 + l^2$

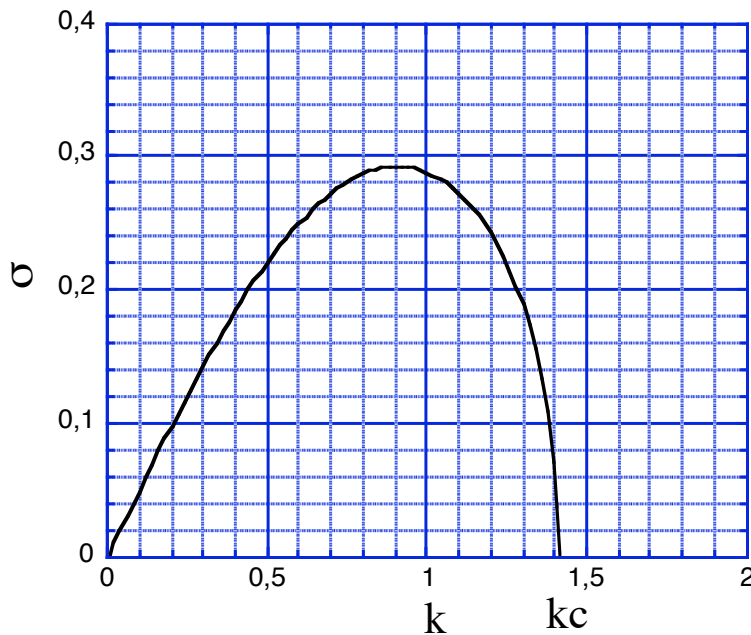
Des solutions non nulles sont obtenues si le déterminant du système (45, 46) en A_1 et A_2 est non nul. Cette équation du second degré s'écrit :

$$\omega^2 (K^2 + 1 + \gamma) - \omega k U_1 (K^2 + 2\gamma) + k^2 U_1^2 \gamma = 0 \quad (47)$$

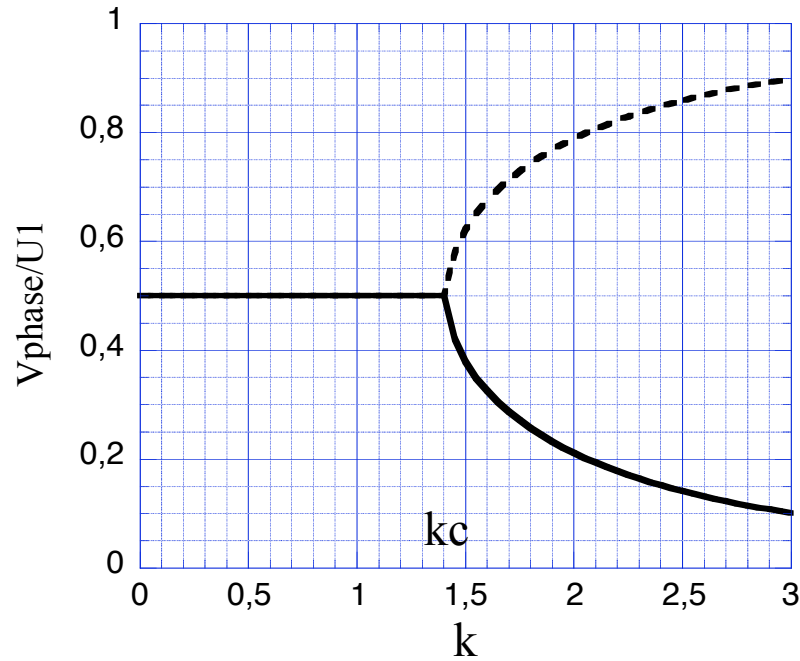
on obtient alors **la relation de dispersion**

$$\omega = k U_1 \frac{K^2 + 2\gamma \pm \sqrt{K^4 - 4\gamma}}{2(K^2 + 1 + \gamma)} \quad (48)$$

Le système est toujours instable pour les grandes longueurs d'ondes $0 < |K| < \sqrt{2\gamma}^{1/4} = \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^{1/4}$, avec $\delta = H_1 / (H_1 + H_2)$.



Taux de croissance : $\sigma = \text{Im}(\omega)$ de l'instabilité lorsque $l^2 \ll k^2$ avec $U_1 = 1; \delta = 0.5$ ($\gamma = 1$) et $k_c = \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^{1/4}$.



Vitesse de phase : $V_{phase} = \text{Re}\left(\frac{\omega}{k}\right)$ lorsque $l^2 \ll k^2$ avec

$$U_1 = 1; \delta = 0.5 \quad (\gamma = 1) \quad \text{et} \quad k_c = \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^{1/4}.$$

Dans tout les cas, la vitesse de phase du mode instable est inférieure à la vitesse de l'écoulement U_1

$$V_{phase} = \frac{\text{Re}(\omega)}{k} = U_1 \frac{K^2 + 2\gamma}{2(K^2 + \gamma + 1)} < U_1$$

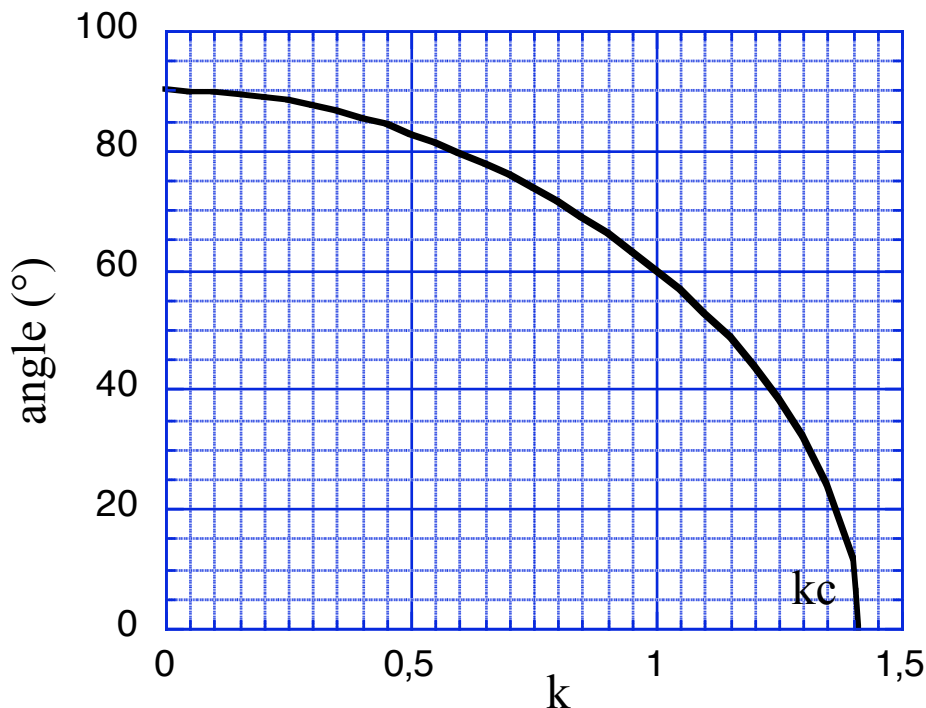
Déphasage entre la perturbation dans la couche 1 et 2

En utilisant les relations (45) et (48) on en déduit, pour le mode instable, le rapport A_2/A_1 des amplitudes dans les couches inférieur et supérieur.

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 + K^2 + \frac{kU_1}{\tilde{\omega} - kU_1} \quad \text{avec} \quad \tilde{\omega} = kU_1 \frac{K^2 + 2\gamma + i\sqrt{4\gamma - K^4}}{2(K^2 + 1 + \gamma)}$$

Dans le cas, $U_1 = 1$; $\gamma = 1$ ($\delta = 0.5$) et $k_c = \sqrt{2}$ on trouve

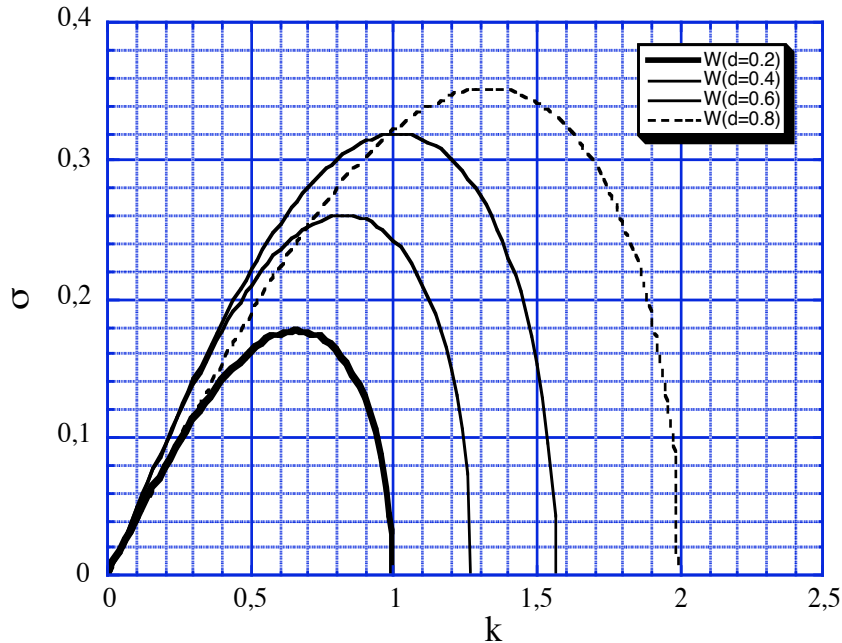
$$\text{simplement} \quad \text{tg}\theta = \arg\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{\sqrt{4 - K^4}}{K^2} \quad (\text{voir graphe ci-dessous})$$



La perturbation dans la couche inférieure est en avance de phase par rapport à celle de la couche supérieure. Le système tend à être en quadrature de phase pour les grandes longueurs d'onde ($k \Rightarrow 0$).

Cette instabilité augmente la composante barotrope de l'écoulement global (eclt base + perturbation).

Influence du paramètre $\gamma = \frac{H_1}{H_2}$; $\gamma = \frac{\delta}{1-\delta}$



($\delta=0.2 ; 0.4 ; 0.6$ et 0.8 avec $U_s=1$ dans la limite $k^2 \gg 1^2$)

Le taux de croissance augmente avec γ tandis que la longueur d'onde diminue.

On peut généraliser ces résultats au cas $U_2 \neq 0$ en ajoutant une vitesse barotrope (vitesse identique dans chaque couche). L'invariance par translation à vitesse uniforme (advection barotrope) nous permet de remplacer U_1 dans (31) par $U_s=U_1-U_2$.

Bilan :

Un écoulement barocline $U_s = U_1 - U_2 \neq 0$, non dissipatif, est toujours instable.

C'est une instabilité à grande longueur d'onde. Les modes instables correspondent à $\lambda > \lambda_c = \pi\sqrt{2} \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right)^{1/4} R_d^*$.

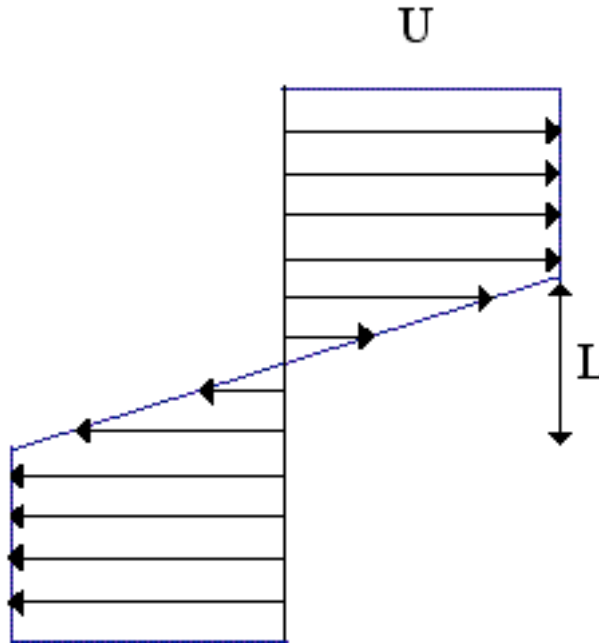
Le mode le plus instable (taux de croissance maximum) correspond à

$$\lambda_{\max} \approx 1.5 \lambda_c \approx 6.6 \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right)^{1/4} R_d^*$$

Cette instabilité tend à augmenter la composante barotrope de l'écoulement global et à transformer l'énergie potentielle de l'écoulement de base en énergie cinétique.

Instabilités de cisaillement barotrope

Cisaillement barotrope (Drazin & Read, Hydrodynamic stability, Cambridge University Press)



relation de dispersion $\sigma = \text{Im}(\omega)$:

$$\sigma = \frac{U}{L} \frac{\sqrt{e^{-4kL} - (1-2kL)^2}}{4} \tag{49}$$

Si on prend $U=1$ et $L=R_d^*$ on retrouve une relation de dispersion identique à l'instabilité barocline : **instabilité de grande échelle**.

