

V. Influences de la topographie.

V.0 Quelle topographie sous les courants océaniques ?

V.1 Principe de similitude, limitations expérimentales et paramètre de topographie.

V.2 QG bi-couche avec une topographie linéaire : modes propres, comparaison avec effet beta.

V.3 Influences de la topographie sur la stabilité.

V.4 Analyse de stabilité linéaire : modèle de Phillips avec topographie.

V.5 Effets non-linéaire, impact de la topographie sur la dynamique des tourbillons.

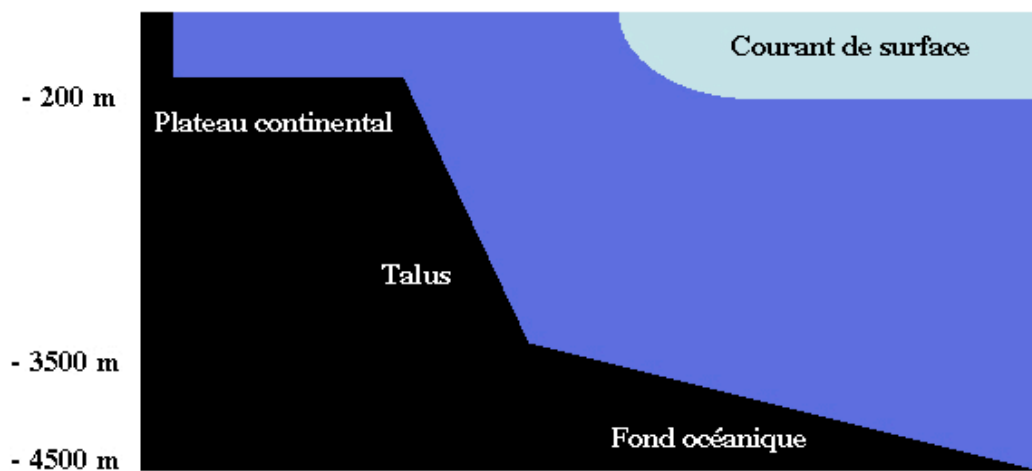
Quel type de topographie sous les courants océaniques ?

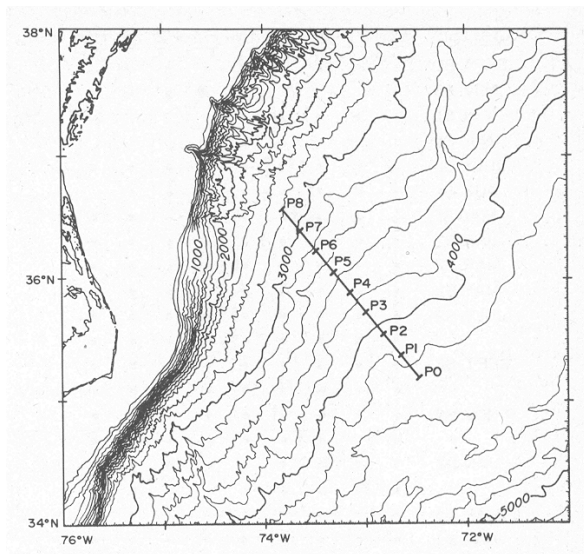
Le bassin du Gulf-Stream



d'après

Topographie simplifiée :





Transect de la campagne PEGASUS

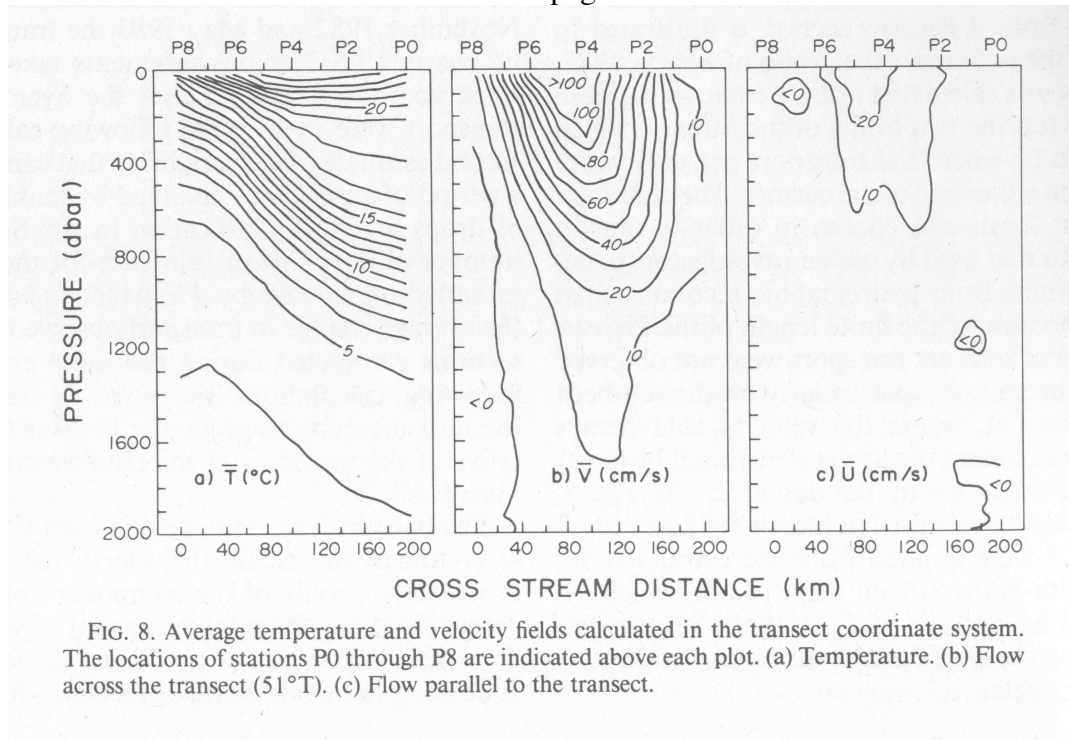


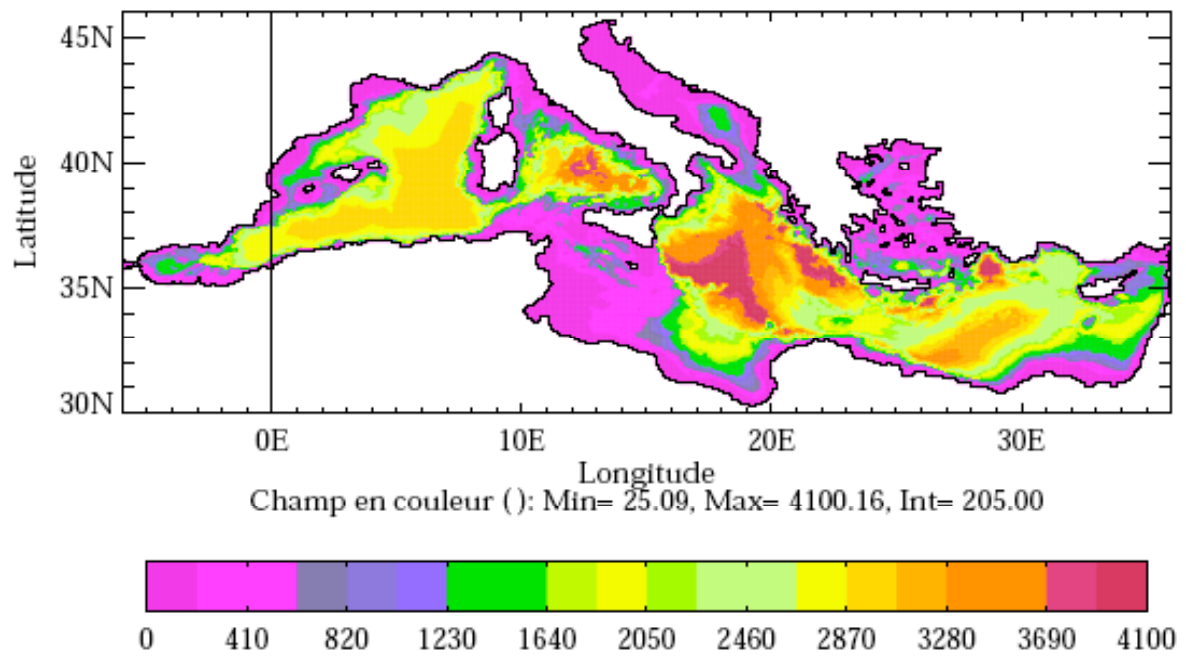
FIG. 8. Average temperature and velocity fields calculated in the transect coordinate system. The locations of stations P0 through P8 are indicated above each plot. (a) Temperature. (b) Flow across the transect ($51^\circ T$). (c) Flow parallel to the transect.

D.Halkin & T. Rossby « *The structure and transport of the Gulf-Stream at $73^\circ W$* »
 Journal of Phys. Oceanogr. Vol. 15, p1439 (1985).

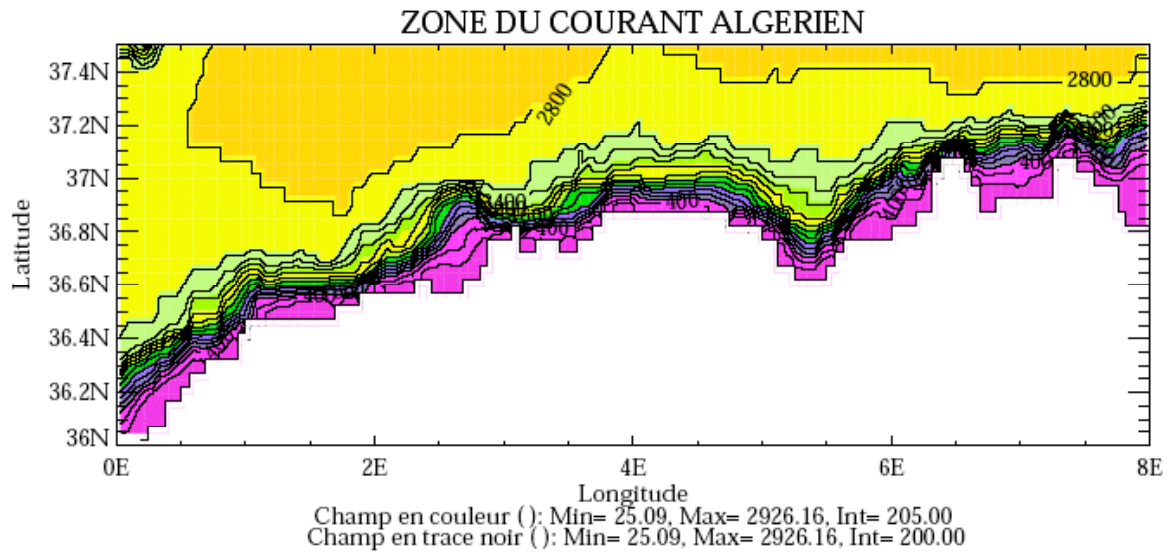
Talus : pente 0.1-0.02

Topographie sous Gulf-Stream : pente $\sim 0.02-0.005$

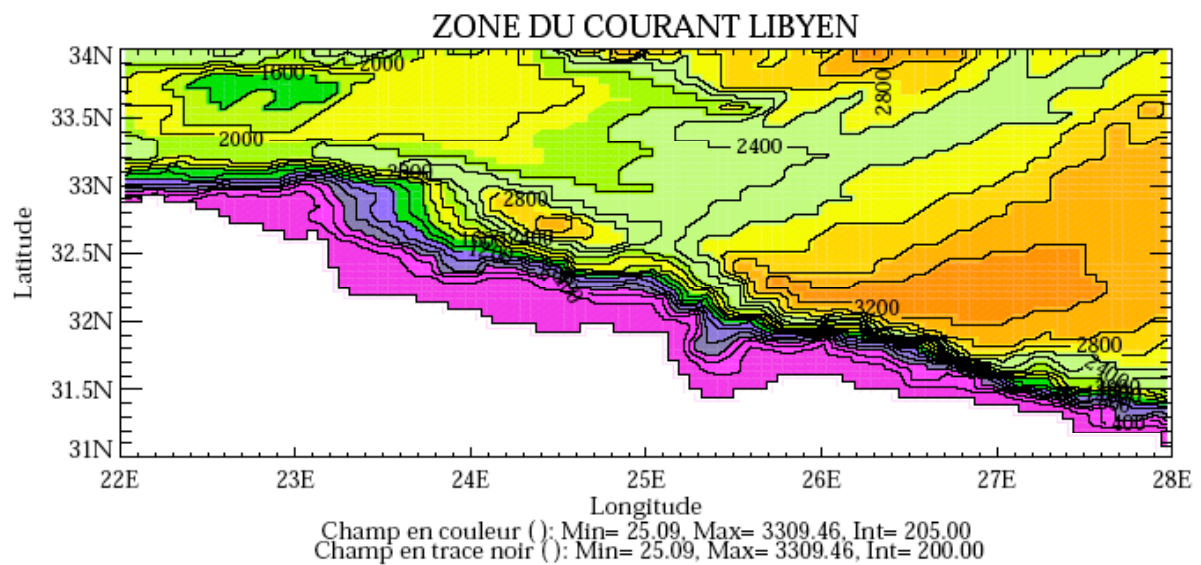
Bassin Méditerranéen une topographie complexe



Bathymétrie sous le courant Algérien



sous le courant Libyen



Talus de forte pente : pente ~ 0.1-0.05

Milieu du bassin : pente ~ 0.01-0.005

Principe de similitude et limitations expérimentales

Peut-on réaliser en laboratoire des topographies en conservant des pentes de 2% ?

Conditions expérimentales :

$$h_1 \approx 1 - 2\text{cm} \quad H \approx 6\text{cm} \quad \Rightarrow \quad L = H/p \approx 3\text{m}$$

Cela nécessite une cuve et donc une table tournante de plusieurs mètres de diamètre !!

Possible sur la plateforme Coriolis (LEGI, Grenoble) :

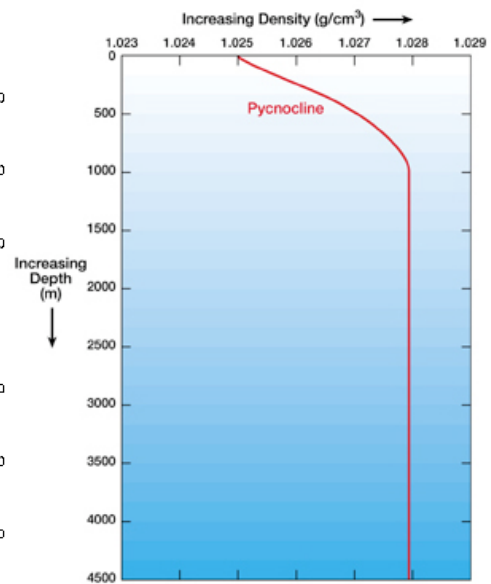
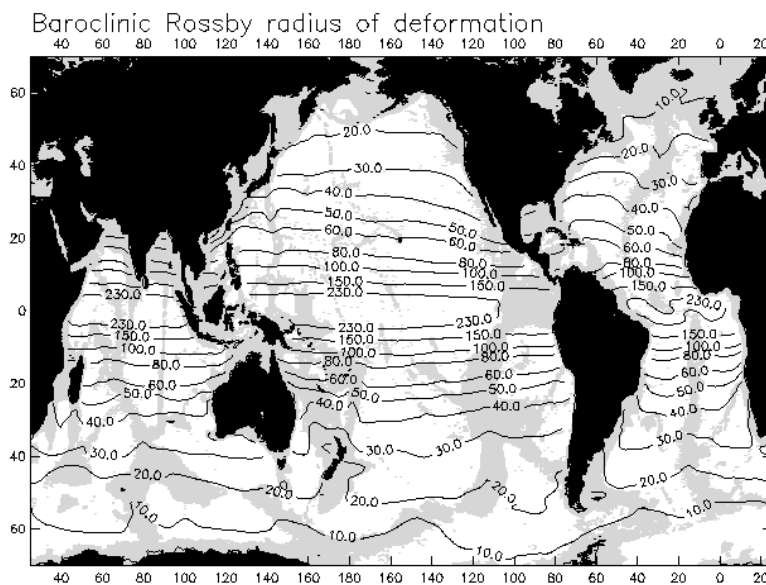


Diamètre : **13 m** Poids : **300 T**

On pourrait cependant, dans une installation de taille moyenne (c.f. ENSTA Palaiseau, Jussieu) étudier l'influence du talus ($p \sim 0.1$) sur le courant côtier de surface ?

Dans ce cas, pour respecter le principe de similitude, il faut reproduire la pente des isopycnes.

Rappel (ordre de grandeur dans l'océan, moyennes latitudes):



rayon déformation premier mode barocline :

$$R_d^* = 20-60 \text{ km}$$

épaisseur thermocline :

$$h_0 = 500-1000 \text{ m}$$

$$\alpha = h_0 / R_d^* \sim 500 \text{ m} / 30 \text{ km} \sim 0.02 \ll 1$$

Il sera donc très difficile (impossible ?) de respecter le principe de similitude sur α au laboratoire.

En général :

$$p_{\text{labo}} = 10-100 p_{\text{océan}} ; \alpha_{\text{labo}} = 10-100 \alpha_{\text{océan}}$$

Néanmoins, on peut espérer reproduire en laboratoire un régime dynamique équivalent.

Paramètre de Topographie

Il semble alors judicieux, pour estimer l'influence de la topographie sur la stabilité du courant, d'utiliser un nombre adimensionnel **To** construit sur le rapport de la pente topographique sur la pente de l'interface :

$$T_o = \frac{\partial_y h_T}{\partial_y \eta} \approx - \frac{g^* p}{f_0 U_s}$$

On suppose ici que la vitesse du courant de surface U_s vérifie, au premier ordre, l'équilibre géostrophique à savoir :

$$U_s \approx - \frac{g^*}{f_0} \partial_y \eta$$

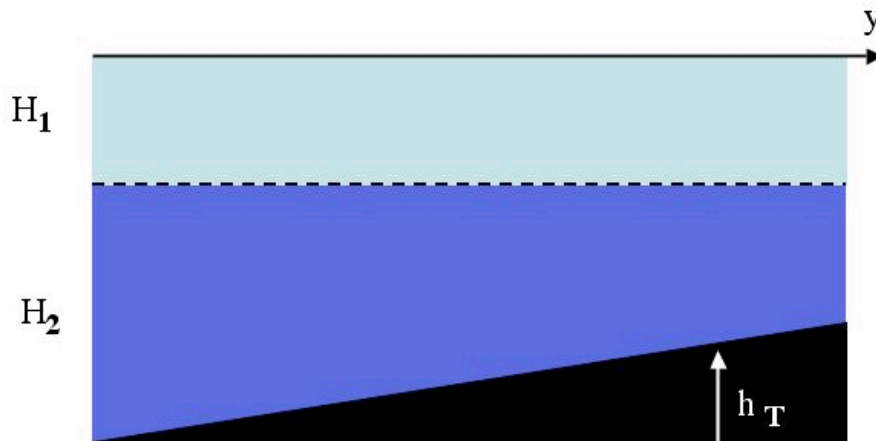
On peut également chercher à exprimer le paramètre de Topographie en fonction de α et du nombre de Rossby **Ro**. On écrit alors :

$$R_o = \frac{U_s}{f_0 R_d^*} \approx \frac{g^*}{f_0^2 R_d^*} |\partial_y \eta| \approx \frac{R_d^*}{h_0} |\partial_y \eta|$$

Il en résulte :

$$T_o \approx \frac{p}{\alpha R_o}$$

Modes propres pour un QG bi-couche, en présence d'une topographie linéaire.



Formulation adimensionnelle (rappels):

$$Q_1 = \frac{f}{H_1} (1 + R_o \omega_1 - \lambda \eta) + O(R_o) \quad (50.a)$$

$$Q_2 = \frac{f}{H_1} \gamma (1 + R_o \omega_2 + \lambda \gamma (\eta + h_T)) + O(R_o) \quad (50.b)$$

On suppose que la pente topographique $p = \partial_y h_T = \text{Cst}$ est faible et du même ordre de grandeur que la pente de l'interface $\partial_y \eta$ (pente isopycne).

Validité du modèle QG : $R_o = \frac{V}{fR_d^*} \approx \lambda \ll 1$

- Nombre de Rossby petit (équilibre géostrophique au premier ordre)

- Faible déviation de l'interface (ou des isopycnes) et faible pente

On considère une **topographie linéaire** ce qui s'écrit (formulation dimensionnelle) $h_T(y) = -H_2 \left(\frac{\rho\gamma}{\alpha} y \right) = -H_2 \text{Ro}(\gamma \text{To} y)$.

le système d'équation QG bi-couche avec topographie s'écrit alors :

$$\partial_t [\Delta\pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)] + J(\pi_1, \Delta\pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)) = 0 \quad (51)$$

$$\partial_t [\Delta\pi_2 + \gamma(\pi_1 - \pi_2)] + J(\pi_2, \Delta\pi_2 + \gamma(\pi_1 - \pi_2)) + \gamma \text{To} \partial_x \pi_2 = 0 \quad (52)$$

Linéarisation du système d'équation (51,52) :

$$\partial_t [\Delta\pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)] = 0 \quad (53)$$

$$\partial_t [\Delta\pi_2 + \gamma(\pi_1 - \pi_2)] + \gamma \text{To} \partial_x \pi_2 = 0 \quad (54)$$

et diagonalisation :

$$\partial_t Q = 0 \quad (55)$$

$$\partial_t \Delta [\Delta\varphi - (1 + \gamma)\varphi] + \gamma \text{To} \partial_x (\Delta\varphi - \varphi) = 0 \quad (56)$$

le premier mode propre correspond à la PV dans la couche de surface:

$$Q = \Delta\pi_1 - (\pi_1 - \pi_2) \quad \text{mode lent} \quad \omega = 0$$

et le deuxième mode propre correspond à une onde de Rossby topographique:

$$\varphi = \pi_2 \quad \text{mode onde} \quad \omega = - \frac{\gamma \text{To} k(1 + K^2)}{K^2(1 + \gamma + K^2)} \quad (57)$$

Si il n'y a pas de mouvements dans la couche du fond (i.e. $\pi_2 = 0$) la couche de surface (i.e. π_1) ne ressent pas l'influence de la bathymétrie.

Ondes topographique/ ondes de Rossby

Tout mouvement dans la couche du fond sera influencé par la dynamique des ondes de Rossby topographiques. On peut comparer cette influence à celle des ondes de Rossby planétaire engendrées par l'effet beta. On considère alors au premier ordre une variation linéaire du paramètre de Coriolis (Gill, 1982 ; Pedlosky, 1987) et on introduit la formulation :

$$f(y) = f_0 \left(1 + \frac{R_d^*}{R_T} y\right) = f_0 (1 + b R_o y)$$

et le paramètre beta adimensionnel : $b = f_0 R_d^{*2} / (R_T V)$

En absence de topographie, la conservation lagrangienne de vorticité potentielle s'écrit :

$$\partial_t [\Delta \pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)] + J(\pi_1, \Delta \pi_1 - (\pi_1 - \pi_2)) + b \partial_x \pi_1 = 0 \quad (58)$$

$$\partial_t [\Delta \pi_2 + \gamma (\pi_1 - \pi_2)] + J(\pi_2, \Delta \pi_2 + \gamma (\pi_1 - \pi_2)) + b \partial_x \pi_2 = 0 \quad (59)$$

En linéarisant et diagonalisant le système (58,59) on obtient les relations de dispersion suivantes pour les ondes de Rossby barotrope et barocline:

$$\Pi = \pi_2 + \gamma \pi_1 \quad \omega = -\frac{bk}{K^2} \quad (60)$$

$$\eta = \pi_1 - \pi_2 \quad \omega = -\frac{bk}{1 + \gamma + K^2} \quad (61)$$

Pour comparer l'influence relative de l'effet beta et de la topographie on peut comparer les vitesses de phase $V_\varphi = \omega/k$ des différentes ondes (en prenant $K \approx 1$) :

Topographie

$$V_\varphi = -\frac{2}{2+\gamma} \gamma T_0$$

Rossby barotrope

$$V_\varphi = -b$$

Rossby barocline

$$V_\varphi = -\frac{1}{2+\gamma} b$$

Lorsque $\gamma T_0 \gg b$ la dynamique des ondes liées à la topographie sera beaucoup plus active que les ondes de Rossby associées à l'effet beta. Ce qui peut correspond également à :

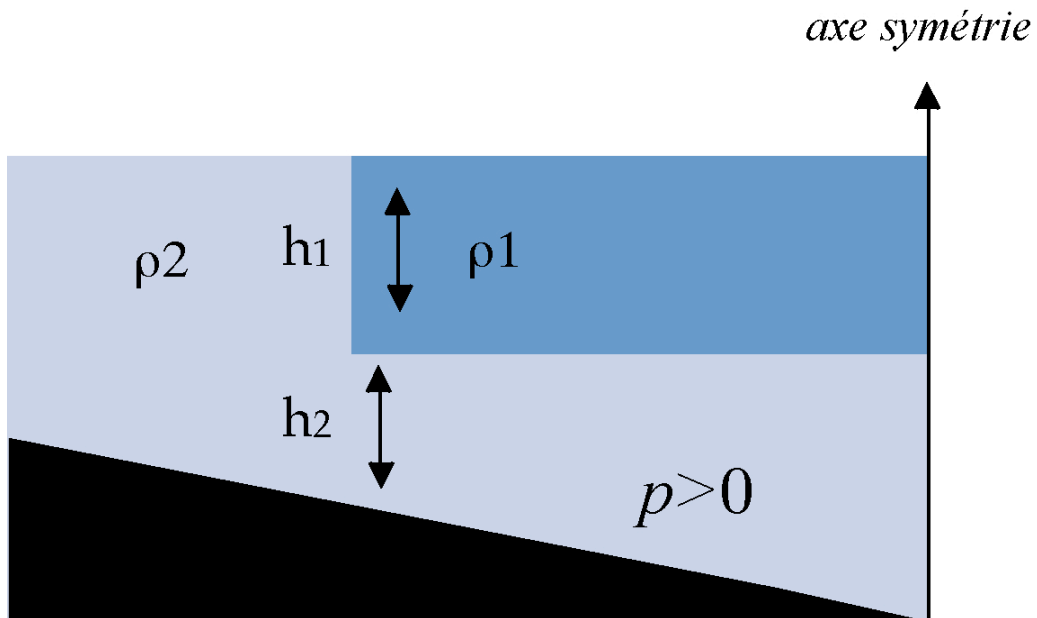
$$p \gg \frac{h}{\gamma R_T} \approx 10^{-3}$$

Dans la plupart des cas, la topographie aura une influence plus importante que l'effet beta. On négligera donc ce dernier en première approximation.

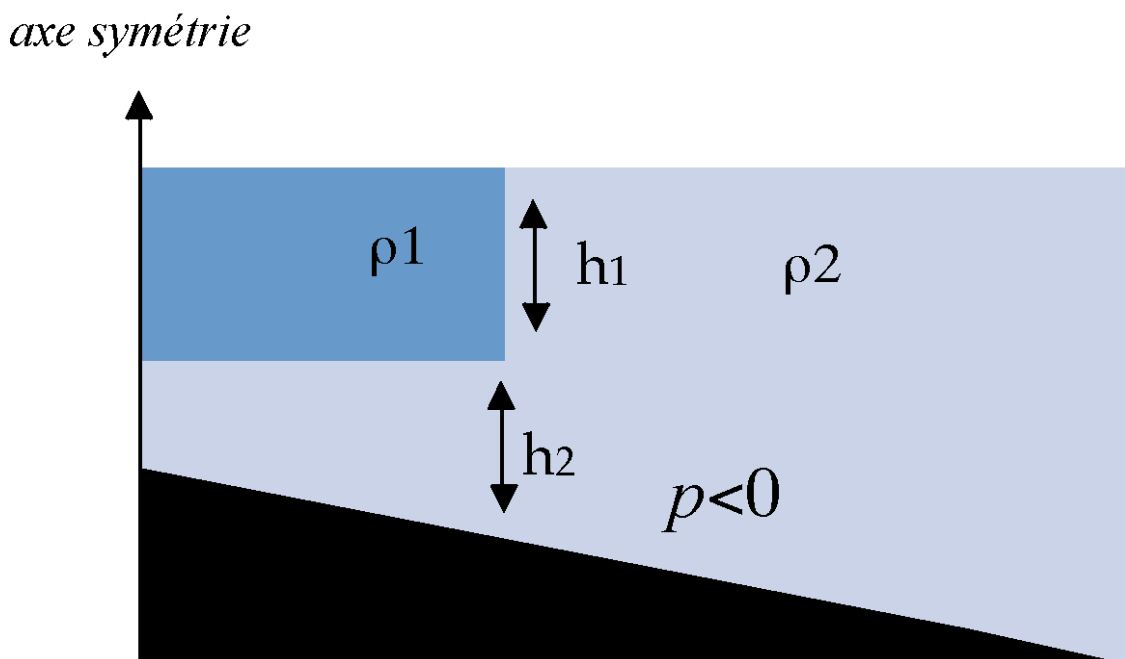
Estimer les valeurs de γT_0 pour les courants côtiers que vous connaissez et comparez les aux valeurs locales de b .

Influences de la topographie sur la stabilité

En utilisant les critères de stabilité généraux vus dans le cours précédent, discutez d'une possible stabilisation par la topographie des écoulements réalisés en laboratoire à partir des conditions initiales suivantes :



Configuration d'**upwelling**



Configuration **courant côtier**

Appliquons le critère (40) pour évaluer l'influence d'une topographie linéaire sur le modèle de Phillips.

Lorsque les vitesses sont constantes selon y dans les deux couches, il en découle :

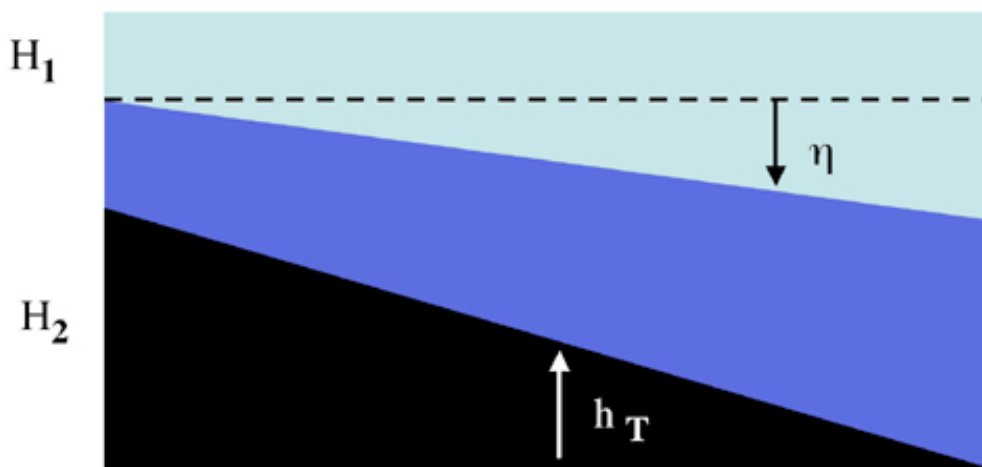
$$\partial_y Q_1^0 = U_1^0 - U_2^0 = U_s \quad (51.a)$$

$$\partial_y Q_2^0(y) = -\gamma(U_1^0 - U_2^0) + \gamma p = \gamma(p - U_s) \quad (51.b)$$

p étant la pente de la topographie.

Il en résulte que si la pente est suffisamment forte ($p > U_s$) et dans le bon sens, le gradient de vorticité potentielle peut changer de signe dans la couche inférieure et par conséquent stabiliser le courant vis-à-vis de l'instabilité barocline.

Exemple de cas stabilisant : (upwelling ou courant le long d'un talus continental):



$T_o < -1$ **STABILISATION**

$T_o > -1$ et $T_o \approx 1$ **?** (nécessite une analyse de stabilité linéaire)

Analyse de stabilité linéaire du modèle de Phillips avec topographie linéaire

Afin de simplifier les calculs (sans rien changer à la physique de l'instabilité) on se place dans le référentiel en translation uniforme à la vitesse de la couche du fond. Dans ce référentiel $U_1 = U_s$ et $U_2 = 0$.

En repartant du système d'équation (36) et en utilisant (51) on obtient :

$$(\partial_t + U_s \partial_x)(\Delta \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)) + U_s \partial_x \varphi_1 = 0 \quad (52.a)$$

$$\partial_t(\Delta \varphi_2 + \gamma(\varphi_1 - \varphi_2)) - \gamma U_s (1 + T_o) \partial_x \varphi_2 = 0 \quad (52.b)$$

On décompose en Fourier selon x, y, t et on se place dans la limite $l \ll k$ ainsi:

$$\varphi_1 = A_1 e^{ik(x-ct)}, \varphi_2 = A_2 e^{ik(x-ct)}$$

ce qui conduit au système linéaire :

$$\left[c(1+k^2) - U_s k^2 \right] A_1 + [U_s - c] A_2 = 0 \quad (53.a)$$

$$\gamma c A_1 + \left[\gamma U_s (1 + T_o) - c(\gamma + k^2) \right] A_2 = 0 \quad (53.b)$$

Des solutions non nulles sont obtenues si le déterminant du système (53) en A_1 et A_2 est non nul. Cette équation du second degré s'écrit :

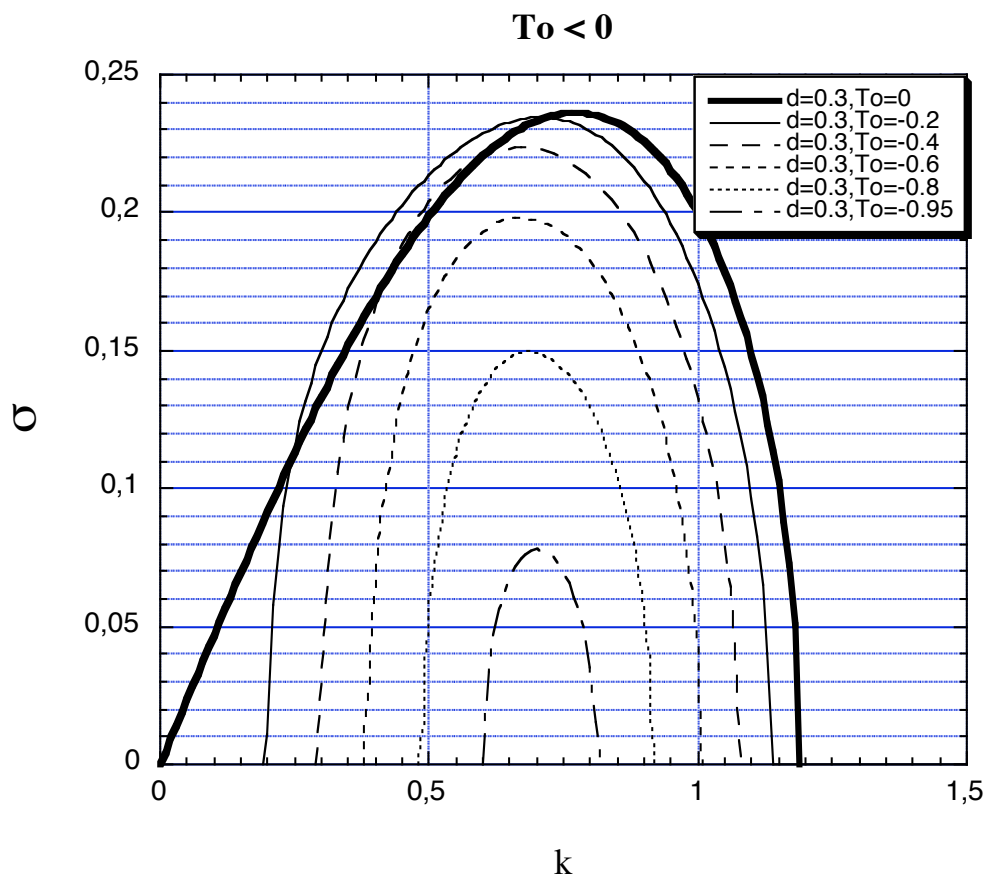
$$\begin{aligned} & c^2 k^2 (k^2 + 1 + \gamma) - c U_s (k^4 + \gamma(2 + T_o)k^2 + \gamma T_o) \\ & + k^2 U_s^2 \gamma (1 + T_o) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

un discriminant négatif implique l'existence d'un mode instable:

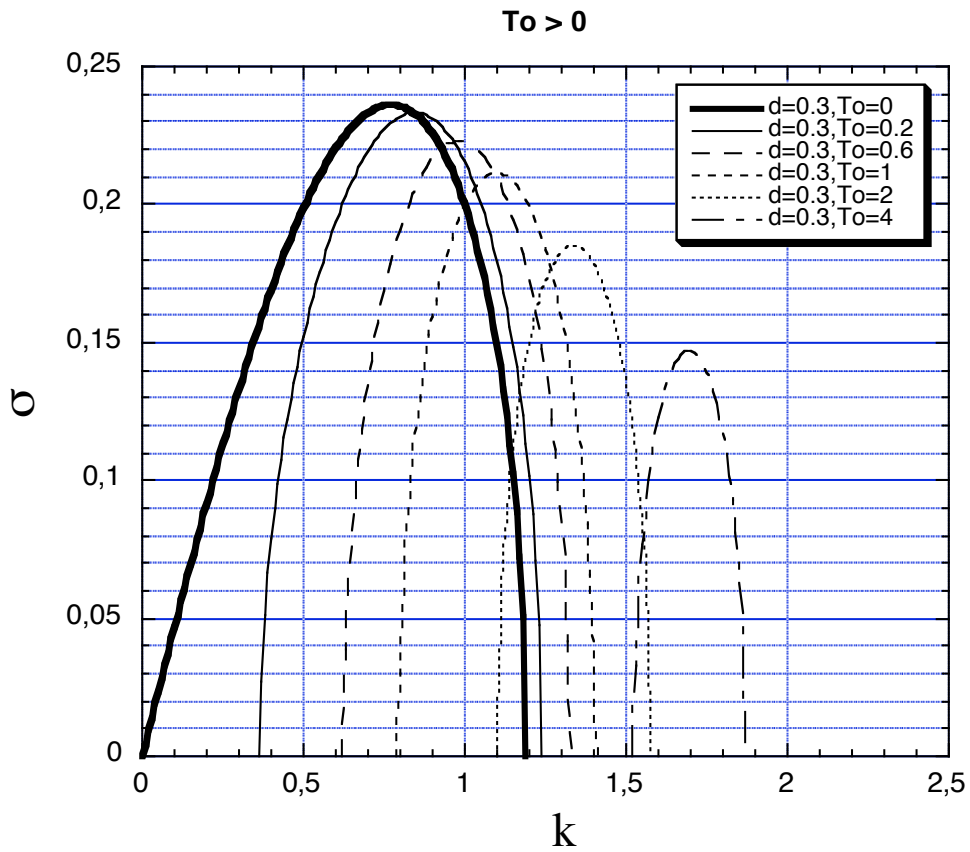
$$\Delta / U_s^2 = k^8 - 4\gamma k^4 - 2\gamma T_o k^2 (k^4 + k^2 - 2\gamma) + (\gamma T_o)^2 (1 + k^2)^2 \quad (55)$$

On remarque pour $k \approx 0$ que $\Delta/U_s^2 \approx (\gamma T_0)^2 (1 + 2k^2(1 + 2T_0^{-1}))$ la topographie introduit une zone de stabilité aux grandes longueurs d'onde.

Taux de croissance $\sigma = \text{Im}(kc)$ pour $T_0 < 0$



Le taux de croissance de l'instabilité diminue progressivement lorsque T_0 tend vers -1 valeur limite de stabilité. La longueur d'onde du mode le plus instable reste à peu près constante.

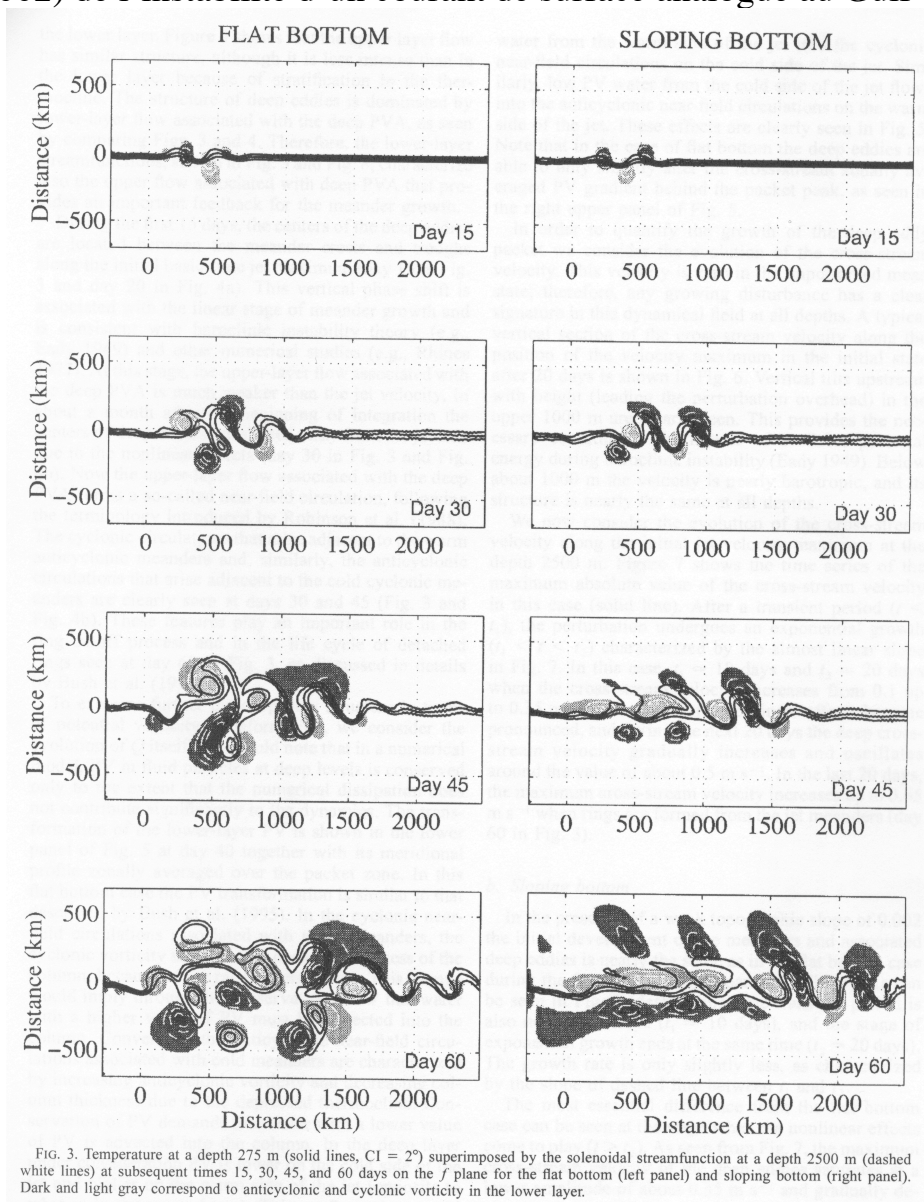
Taux de croissance $\sigma = \text{Im}(kc)$ pour $To > 0$ 

Une pente raide réduit le taux de croissance et lorsque $To > 0$ l'instabilité sélectionne de plus petites longueurs d'onde.

Rôle de la topographie sur les effets non-linéaires, impact sur la formation et la dynamique des tourbillons.

Pour de nombreux courants To est relativement faible (plus petit que 1), quelle peut-être alors l'influence de la topographie ? Pour cela il faut étudier le comportement non-linéaire de l'instabilité et ses mécanismes de saturation. Ce n'est pas l'objectif de ce cours néanmoins des études récentes, notamment des simulations numériques, permettent de tirer certains comportements généraux.

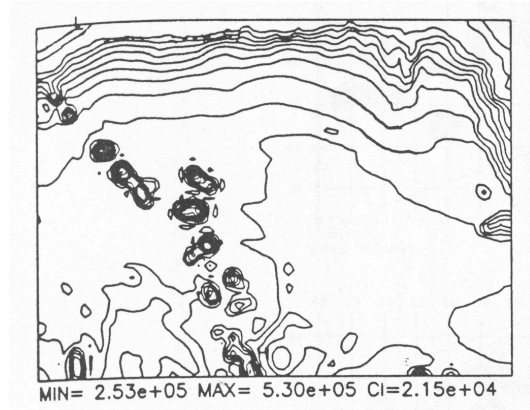
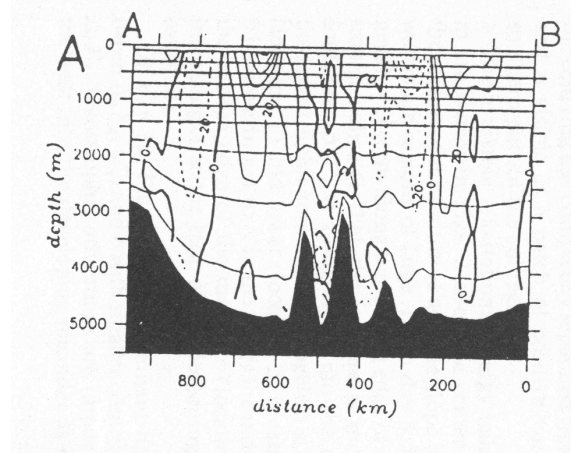
Simulation numérique sans (à gauche) et avec une topographie linéaire (à droite, pente :0.002) de l'instabilité d'un courant de surface analogue au Gulf-Stream.



G. Sutyrin, I. Ginis, S. Frolov « Equilibration of baroclinic meanders and deep eddies in a Gulf-Stream-type jet over a sloping bottom », *J. Phys. Oceanogr.* v. 31, (2001).

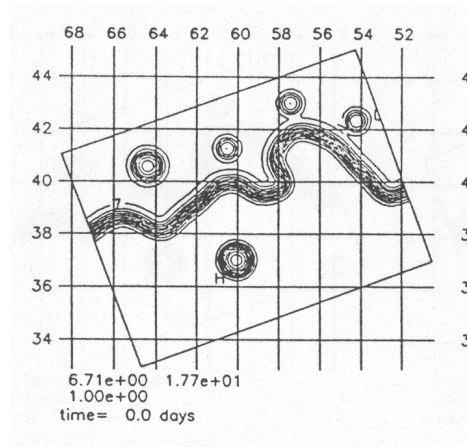
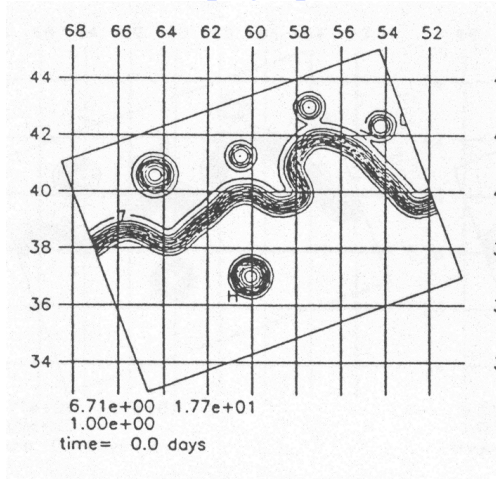
Simulations numériques à l'aide d'un modèle QG multi-couche sans (à gauche) et avec une topographie réaliste (à droite) du bassin du Gulf-Stream. Dans cette étude, l'état initial est déjà constitué de forts méandres.

Topographie (60°W-40°N) incluant les monts sous-marins :

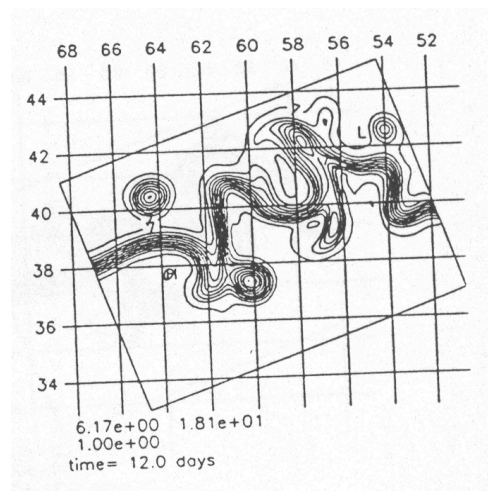
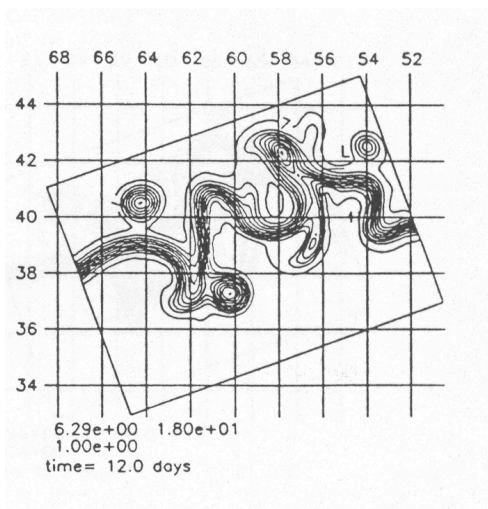


sans topographie

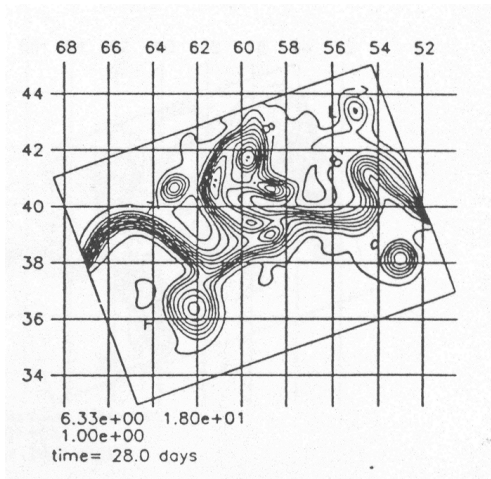
avec topographie



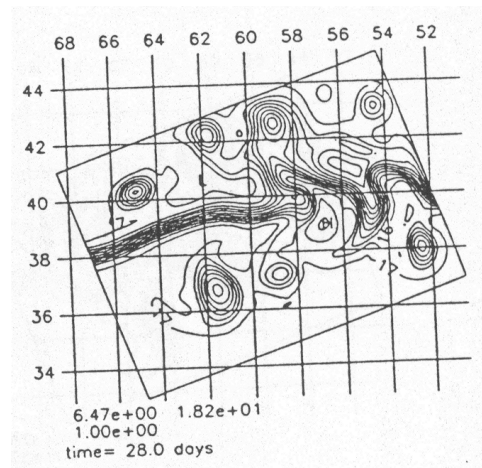
t=0



t=12 jours



t=28 jours



M. Spall & A. Robinson « Regional primitive equation studies of the Gulf-Stream meander and ring formation region » *J. Phys. Oceanogr.* v.20 (1990).

