Qu’est-ce qu’un tenseur ?

On connait les :

- **scalaire** (ex : norme $\|\underline{X}\|$, produit scalaire $\underline{e}_1.\underline{X}$,...)
- **vecteur** $\underline{V} = V_1\underline{e}_1 + V_2\underline{e}_2 + V_3\underline{e}_3 = V_i\underline{e}_i$

(*sommation sur les indices repétés* !)

Pratique : matrice uni-colonne associée à un vecteur.

- **gradient d’un champ scalaire** $\tau(\underline{X})$

(*ex : température, densité, concentration...*)

on construit un vecteur $\underline{\nabla\tau} = (\partial\tau/\partial X_i)\underline{e}_i$

gradient d’un champ de vecteurs ?

(ex : déplacement $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$, vitesse $\underline{U}(\underline{X})$)

on construit une matrice $(\nabla\xi)_{ij} = \partial\xi_i/\partial X_j$

mais attention : depend du choix de la base $\{\underline{e}_i\}$!

La notion de tenseur est une généralisation de la notion de vecteur en tant *“qu’être mathématique”* invariant par changement de base.

Préambule : bases orthonormées

Soit un espace euclidien E de dimension n, avec un produit scalaire (noté $\underline{a}.\underline{b}$). On se place dans tout ce qui suit dans le cas de bases $\{\underline{e}_i\}$ orthonormées :

$$\underline{e}_i.\underline{e}_j = \delta_{ij}$$

en utilisant le symbole de kronecker
$\delta_{ij} = (0\, si\, i \neq j; 1\, si\, i = j)$.

1. règles de changement de base de $\{\underline{e}_i\}$à $\left\{\underline{e}_i^{'}\right\}$:
   $\underline{e}_i^{'} = B_{ij}\underline{e}_j$

2. Le passage d'une base orthonormé en une autre base orthonormé est une **rotation**, il en découle :
   $$^tB = B^{-1}$$

$$\underline{e}_i^{\prime}.\underline{e}_j^{\prime} = \delta_{ij}$$
$$(B_{ik}\underline{e}_k).(B_{jl}\underline{e}_l) = B_{ik}B_{jl}\delta_{kl} = \delta_{ij}$$

$$B_{ik}B_{jk} = B_{ik}(B^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$$

$$(B^{-1})_{ij} = (^tB)_{ij} = B_{ji}$$

1. Calculer : $\delta_{ij}\delta_{jk}, \delta_{ii}$

TENSEURS EUCLIDIENS D'ORDRE UN

On part de la structure d'espace vectorielle de l'espace euclidien E ($\mathbb{R}^3$).

1. Les **tenseurs euclidiens d'ordre 1** sont les **vecteurs** $\underline{V}$ **de** E.
2. A chaque vecteur $\underline{V}$ de E on peut associer la **forme linéaire** ϕ telle que :

$$\forall \underline{X} \in E, \phi(\underline{X}) = \underline{V}.\underline{X} \in \mathbb{R}$$

Exemples de vecteurs :

- position$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) = x_i \underline{e}_i$
- vitesse lagrangienne : $\underline{U}(\underline{X}, t)$
- gradient d'un champ scalaire $\tau(\underline{X})$:

$d\tau = \underline{\nabla\tau}.\underline{dX}$ et $\underline{\nabla\tau} = (\partial\tau/\partial X_i)\underline{e}_i$

Coordonnées cylindriques avec base orthonormée locale $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{dX} = dr\,\underline{e}_r + rd\theta\,\underline{e}_\theta + dz\,\underline{e}_z$$
$$\underline{\nabla\tau} = (\partial\tau/\partial r)\underline{e}_r + \frac{1}{r}(\partial\tau/\partial\theta)\underline{e}_\theta + (\partial\tau/\partial z)\underline{e}_z$$

PRODUIT TENSORIEL DE DEUX VECTEURS

On introduit la multiplication ou **produit tensoriel** de deux vecteurs (noté $\underline{U} \otimes \underline{V}$) en y associant la **forme bi-linéaire** telle que :

$$\forall \underline{(\underline{X}, \underline{Y})} \in E \times E, (\underline{U} \otimes \underline{V})(\underline{X}, \underline{Y}) = (\underline{U}.\underline{X})(\underline{V}.\underline{Y}) \in \mathbb{R}$$

Il en découle :

- DISTRIBUTIVITE (addition)

$$[\underline{U} \otimes (\underline{V}_1 + \underline{V}_2)](\underline{X}, \underline{Y}) = [\underline{U} \otimes \underline{V}_1 + \underline{U} \otimes \underline{V}_2](\underline{X}, \underline{Y})$$

- DISTRIBUTIVITE (multiplication)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda [\underline{U} \otimes \underline{V}](\underline{X}, \underline{Y}) = [(\lambda \underline{U}) \otimes \underline{V}](\underline{X}, \underline{Y}) = [\underline{U} \otimes (\lambda \underline{V})](\underline{X}, \underline{Y})$$

- COMMUTATIVITE ?

$$(\forall \underline{(\underline{X}, \underline{Y})} \in E \times E, (\underline{U}.\underline{X})(\underline{V}.\underline{Y}) \neq (\underline{V}.\underline{X})(\underline{U}.\underline{Y})) \Rightarrow \underline{U} \otimes \underline{V} \neq \underline{V} \otimes U$$

On peut alors construire à partir de la base $\{\underline{e}_i\}$de E, un espace vectoriel $E \otimes E$ ayant pour base $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\}$. Cet espace est de dimension 9 (cas $E = \mathbb{R}^3$) et n'est pas isomorphe à $E \times E$.

TENSEURS EUCLIDIENS D'ORDRE DEUX

Un **tenseur euclidien d'ordre 2** , noté $\underline{\underline{T}}$, est défini comme :

1. Un **élément de l'espace tensoriel** $E \otimes E$:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

2. Une **forme bi-linéaire** sur $E \times E$ telle que :

   $\forall \underline{(X, Y)} \quad \in \quad E \times E, \underline{\underline{T}}(\underline{X}, \underline{Y}) = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{X}, \underline{Y}) = T_{ij}(\underline{e}_i.\underline{X})(\underline{e}_j.\underline{Y})$

3. Un élément **associé à une application linéaire** $\underline{\varphi}$ de E dans E.

   Soit l'application qui au vecteur $\underline{X}$ associe le vecteur $\underline{\varphi}(\underline{X})$, on définit le tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ correspondant :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\phi}(\underline{e}_j) \otimes \underline{e}_j = (\phi_{ij}\underline{e}_i) \otimes \underline{e}_j = \phi_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

   Les composantes du tenseur $\underline{\underline{T}}$ sont égales aux composantes de la matrice de l'application linéaire $\underline{\varphi}$ dans la base $\{\underline{e}_i\}$: $T_{ij} = \phi_{ij}$.

2. Soit $\underline{e}$ un vecteur unitaire. Interpréter géométriquement le tenseur $\underline{e} \otimes \underline{e}$.

3. Etant donné une base orthonormé directe $\{\underline{e}_i\}$, à quelle conditions sur les $\underline{f}_i$ le tenseur $\underline{\underline{T}} = \underline{f}_i \otimes \underline{e}_i$ représente-t-il une rotation ?

4.Déterminer le tenseur correspondant à une projection sur le plan perpendiculaire à $\underline{e}_3$ et celui correspondant à une symétrie par rapport à ce plan.

DEFINITIONS “USUELLES”

On peut introduire avec les tenseurs d’ordre 2 toutes les définitions courament utilisées avec les applications linéaires (ou avec les matrices).

Tenseur identité ou métrique : $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$.

Tenseur inverse de $\underline{\underline{T}}$, notée $\underline{\underline{T}}^{-1}$, tel que : $T_{ik}T_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$.

Déterminant $det(\underline{\underline{T}}) = det(\varphi) = det\left[T_{ij}\right]$

Trace $tr(\underline{\underline{T}}) = T_{ii} = \underline{\varphi}(\underline{e}_i).\underline{e}_i$

Transposition :
- produit vectoriel ${}^t(\underline{a} \otimes \underline{b}) = \underline{b} \otimes \underline{a}$
- tenseur ${}^t\underline{\underline{T}} = T_{ji}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

Tenseurs symétrique-antisymétrique : $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_a + \underline{\underline{T}}_s$
avec $\underline{\underline{T}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^t\underline{\underline{T}})$ et $\underline{\underline{T}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^t\underline{\underline{T}})$

PRODUIT CONTRACTE DE DEUX TENSEURS

Soit le produit contracté (notée “.”) :

1. de **deux vecteurs** (tenseurs d’ordre 1) :
   c’est le produit scalaire $\underline{U}.\underline{V} \in \mathbb{R}$, il est commutatif.
2. d’un **vecteur** avec un **produit tensoriel de deux vecteurs** :
   à gauche $\underline{a}.(\underline{b} \otimes \underline{c}) = (\underline{a}.\underline{b})\underline{c} \in E$
   à droite $\underline{(a \otimes b)}.\underline{c} = \underline{a}.(\underline{b}.\underline{c}) \in E$
   il n’est pas commutatif.
3. d’un **tenseur d’ordre 2** avec un **tenseur d’ordre 1** :
   - $\underline{\underline{T}}.\underline{X} = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j).\underline{X} = T_{ij}X_j\underline{e}_i = \underline{\varphi}(\underline{X})$
   - $\underline{Y}.\underline{\underline{T}} = \underline{Y}.(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)T_{ij} = T_{ij}Y_i\underline{e}_j = {}^t\,\underline{\underline{T}}.\underline{Y}$

remarque : le produit contracté à gauche et à droite est associatif

$$\underline{X}.(\underline{\underline{T}}.\underline{Y}) = (\underline{X}.\underline{\underline{T}}).\underline{Y} = \underline{X}.\underline{\underline{T}}.Y = X_iT_{ij}Y_j \in \mathbb{R}$$

d’ou extraction des composantes de $\underline{\underline{T}}$: $T_{ij} = \underline{e}_i.\underline{\underline{T}}.\underline{e}_j$

PRODUIT CONTRACTE
DE DEUX TENSEURS D'ORDRE DEUX

Le produit contracté $\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}^{'}$ est le tenseur associé à l'application linéaire composée $\underline{\varphi} \circ \underline{\varphi}^{'}$. Ainsi,

$$\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}^{'} = T_{ik}T^{'}_{kj}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \in E \otimes E$$

et on verifie également la relation :

$${}^t(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}^{'}) = {}^t\,\underline{\underline{T}}^{'}.{}^t\underline{\underline{T}}$$

PRODUIT DOUBLEMENT CONTRACTE

C'est la trace du tenseur $\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}^{'}$ que l'on note " :"

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}^{'} = tr(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}^{'}) \in \mathbb{R}$$

5. Montrez les propriétés d'associativité du produit contracté :

- $\left(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{F}}\right).\underline{u} = \underline{\underline{T}}.\left(\underline{\underline{F}}.\underline{u}\right)$

- $\underline{u}.\left(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{F}}\right).\underline{v} = \left(\underline{u}.\underline{\underline{T}}\right).\left(\underline{\underline{F}}.\underline{v}\right)$

- $\left(\underline{\underline{F}}.\underline{u}\right) \otimes \underline{v} = \underline{\underline{F}}.\left(\underline{u} \otimes \underline{v}\right)$

GRADIENT D’UN CHAMP DE VECTEUR

Le champ de gradient du champ de vecteur $\underline{T}(\underline{X})$ est le champ de tenseur du deuxième ordre $\underline{\underline{\nabla T}}$ défini par :

$$\underline{dT} = \underline{\underline{\nabla T}}.\underline{dX}$$

$$\underline{\underline{\nabla T}} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

DIVERGENCE D’UN CHAMP DE VECTEUR

La divergence du champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{X})$ est le champs scalaire obtenu en prenant la trace du gradient :

$$div(\underline{T}) = tr(\underline{\underline{\nabla T}}) = \frac{\partial T_i}{\partial X_i}$$

6. Déterminez les gradients suivants :

- $\underline{\underline{\nabla X}}$

- $\underline{\underline{\nabla(\alpha U)}}$, $\alpha(\underline{X})$ étant une fonction scalaire et $\underline{U}(\underline{X})$ un vecteur

- $\underline{\underline{\nabla U}}$ en coordonnées cylindriques, avec $\underline{U} = u(r)\,\underline{e}_r$