

PC1 : Trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission dans un tourbillon étiré.

(stegner@lmd.ens.fr ; <http://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431>)

Les tourbillons étirés sont des structures très fréquentes dans les écoulements industriels ou géophysiques. Le plus connu est sans doute le tourbillon de vidange d'un évier (figure.a), le plus énergétique et spectaculaire est la tornade atmosphérique (figure.b).



Le but de ce problème est de se familiariser avec les descriptions lagrangienne et eulérienne. On cherchera à déterminer la forme des trajectoires, des lignes de courant et des lignes d'émission au coeur d'un tourbillon étiré. L'observation de la dynamique d'un colorant dans le coeur d'un tourbillon étiré (figure.a), projetée dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$, montre que la vitesse de rotation angulaire ω d'une particule par rapport au centre O du tourbillon est constante. De plus, sa distance au centre du tourbillon suit une loi $r(t) = \lambda(t)R$ avec $r(0) = R$. On utilisera les coordonnées polaires (r, θ) et (R, Θ) correspondant respectivement à la position actuelle \underline{x} et à la position initiale \underline{X} (configuration de référence).

1. Déterminer en coordonnées polaires, les trajectoires associées $r(\theta)$ à ce mouvement.
2. Calculer le champ de vitesse en description eulérienne et lagrangienne. Pour quelle fonction $\lambda(t)$ le mouvement est-il stationnaire? Vérifiez, dans ce cas, que la vitesse lagrangienne n'est pas nécessairement constante.
3. Déterminer, dans le cas général, les lignes de courant du mouvement en coordonnées polaires.
4. Calculer la ligne d'émission d'un colorant émis pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ au point (r_0, θ_0) observée au temps t .
5. Calculer la variation d'aire occupé par les particules de fluides. Montrez qualitativement que pour un écoulement incompressible on doit nécessairement avoir un étirement selon l'axe (O, \underline{e}_3) .