PC2 : Glissement et torsion en déformation finie.

(stegner@lmd.ens.fr ;http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431)

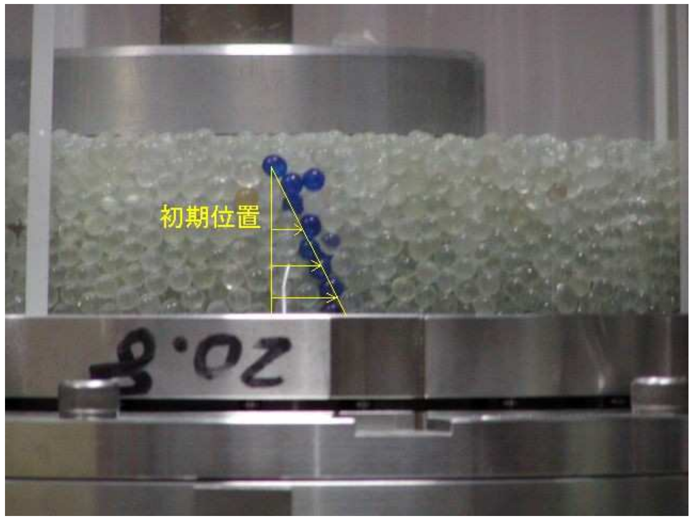

Figure. 1 Expérience de torsion réalisée sur un milieu granulaire. Les billes colorées en bleu étaient initialement verticales. On observe une tranformation local correspondant à un glissement simple.

1 Glissement simple

On considère un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et la transformation suivante, en description lagrangienne :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{X} + 2\,\alpha(t)\,X_2\,\underline{e}_1.$$

1. Dessiner approximativement l'image de la sphère de rayon unité centrée sur l'origine par cette transformation.
2. Montrer que la transformation est homogène. Calculer son gradient $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla \phi}}$, la transformation inverse $\underline{\phi}^{-1}$ et son gradient $\underline{\underline{F}}^{-1}$.
3. $\underline{\phi}$ étant une transformation homogène, elle transforme des segments en segments : déterminer les images des segments alignés avec chacun des vecteurs de la base cartésienne.
4. Calculer la dilation volumique associée à la transformation.
5. Calculer le vecteur-aire $\underline{a}$ transporté convectif d'une facette d'aire S_0 et de normale $\underline{e}_1$ dans la configuration initiale κ_0. Même question avec une facette de normale $\underline{e}_2$.
6. Calculer le tenseur des dilations $\underline{\underline{C}}$ et le tenseur de déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$. En déduire les allongements unitaires dans les directions $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ et le glissement entre ces deux directions.
7. Trouver dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ un couple de vecteurs unitaires $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ pour lesquels l'allongement est nul. Tracer ces vecteurs (en les supposant par exemple issus de l'origine) et leurs images par la transformation de glissement.
8. En déduire (sans diagonaliser explicitement $\underline{\underline{C}}$) les directions principales de déformation. Indication : on cherchera un couple de vecteurs qui restent orthogonaux par la transformation $\underline{\underline{F}}$.
9. Déterminer les dilatations principales.
10. Expliciter la décomposition polaire: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}}$.

2 Torsion simple

On considère un cylindre de révolution de section circulaire de rayon A, d'axe OZ et de hauteur L. Un point $\underline{M}_0$ est repéré par ses coordonnées cylindriques (R, Θ, Z) et on note $(\underline{e}_R(\Theta), \underline{e}_\Theta(\Theta), \underline{e}_Z)$ la base cylindrique locale.

Le cylindre subit une transformation définie en description lagrangienne et en coordonnées cylindriques par :

$$r = R, \qquad \theta = \Theta + \beta(t)\,\frac{Z}{L}, \qquad z = Z,$$

la base des coordonnées cylindriques associée au point transporté $\underline{M}$ étant $(\underline{e}_r(\theta), \underline{e}_\theta(\theta), \underline{e}_z)$.

1. Etudier la transformation des sections droites du cylindre (coordonnée Z constante) puis celle des droites parallèles aux axes du cylindre (coordonnées R et Θ constantes).

2. Déterminer le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla \phi}}$. Cette transformation est-elle homogène ?

3. Calculer le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$ et le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$. Comparer ces deux tenseurs à ceux obtenus pour le glissement simple. Interpréter.

4. Déterminer les directions principales de la déformation .

5. Déterminer la décomposition polaire.