PC3 : Transformations infinitésimales.

(stegner@lmd.ens.fr ;http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431)

1 Torsion infinitésimale

On considère un cylindre de révolution de section circulaire de rayon A, d'axe OZ et de hauteur L. Un point $\underline{M}_0$ est repèré par ses coordonnées cylindriques (R, Θ, Z) et on note $(\underline{e}_R(\Theta), \underline{e}_\Theta(\Theta), \underline{e}_Z)$ la base cylindrique locale.

Le cylindre subit une transformation définie en description lagrangienne et en coordonnées cylindriques par :

$$r = R, \qquad \theta = \Theta + \beta(t)\,\frac{Z}{L}, \qquad z = Z,$$

la base des coordonnées cylindriques associée au point transporté $\underline{M}$ étant $(\underline{e}_r(\theta), \underline{e}_\theta(\theta), \underline{e}_z)$.

1. Calculer le champ de déplacement $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$ et son gradient $\underline{\underline{\nabla\xi}}$.
2. Déterminer les conditions pour que la transformation soit infinitésimale.
3. Déterminer les conditions pour que la déformation soit infinitésimale. Pour quelle géométrie une torsion finie aura une déformation infinitésimale ?
4. Calculer dans le cadre de l'hypothèse d'une transformation infinitésimale l'expression simplifié de $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$ et de son gradient $\underline{\underline{\nabla\xi}}$. Interpreter $\underline{w}$ la partie symétrique de $\underline{\underline{\nabla\xi}}$ en terme de rotation.
5. Sous l'hypothèse d'une transformation infinitésimale, calculer les allongements unitaires dans les directions de la base locale associée à $\underline{M}_O$.

2 Transformation d'angle fini et déformation infinitésimale

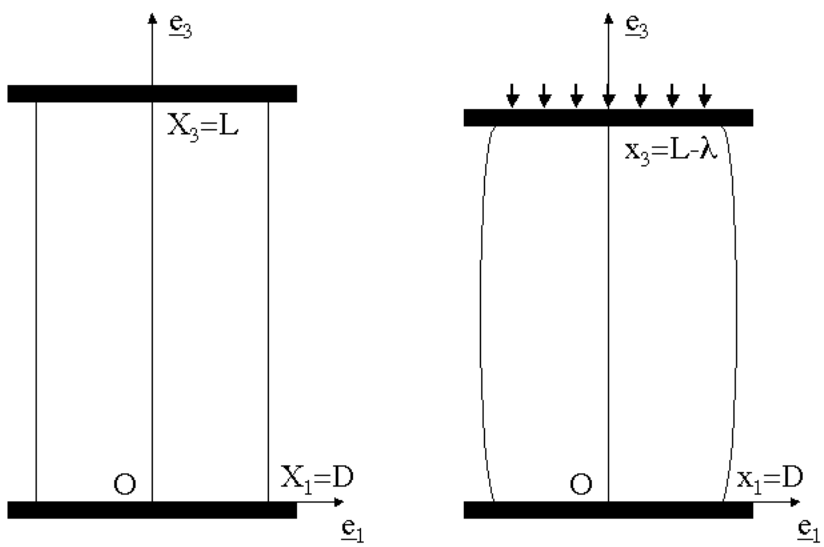
On considère dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ une transformation homogène composée d'une dilatation pure d'un facteur λ le long de l'axe $(O, \underline{e}_1)$ puis d'une rotation dans le plan d'angle θ.

1. Calculer le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$ et le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$. Déterminer la condition de déformation infinitésimale.
2. Calculer le champ de déplacement $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$ et son gradient $\underline{\underline{\nabla\xi}}$. Determiner les conditions de validité de l'approximation de transformation infinitésimale.
3. Calculer $\underline{\underline{e}}$, $\underline{\underline{\nabla\xi}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas d'une rotation pure d'angle fini ($\lambda = 1$ et $\theta = \pi/2$). Comentaires ?

3 Compression d'un joint en caoutchouc

Une façon de tester certaines propriétées mécanique d'un matériau est de lui imposer à l'aide d'une presse un mouvement de compression. On s'interesse ici à un joint de grande longueur (supposée infinie) et de section rectangulaire. Le joint est collé aux deux faces de la presse dans sa configuration de repos. Les faces de la presse sont perpendiculaires à la direction $\underline{e}_3$. Après compression, la hauteur L du joint est diminué de l'abaissement λ.

On s'intéresse à un joint en caoutchouc, matériau qui se déforme sans variation de volume. Dans tout ce qui suit, on se place dans l'hypothèse d'une transformation infinitésimale.



1. Ecrire les conditions limites sur le champ de déplacement $\underline{\xi}$ en $X_3 = 0$ et $X_3 = L$.

2. Trouver au moins un champs de déplacement $\underline{\xi}$ qui conserve le volume de l'échantillon (déformation incompressible) et satisfait aux conditions limites.

3. Déterminer les conditions pour que la déformation soit infinitésimale ?

4. Calculer le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{w}}$ la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\underline{\nabla\xi}}}$. Le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est-il linéaire par rapport à $\underline{X}$?