PC4 : Transport et bilans.

(stegner@lmd.ens.fr ;http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431)

1 Passage d'un objet céleste cubique

Nous considérons un corps occupant au temps $t_0 = 0$ un domaine cubique de coté l, qui, dans un repère orthonormé $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ est défini par $\Omega_0 = [0, l] \times [0, l] \times [0, l]$, avec une distribution de densité constante $\rho(\underline{x}, t_0) = \rho_0$ ($\underline{x} \in \Omega_0$). Pour $t > t_0$ le corps se déplace dans le vide ($\rho(\underline{x}\, t_0) = 0, \underline{x} \notin \Omega_0$) avec une vitesse uniforme et constante $\underline{U}_t(\underline{x}\, t) = U_0\underline{e}_1(\underline{x} \in \Omega_0)$ en l'absence de toute force externe (de contact comme de volume). En définissant le volume de contrôle cubique fixe $\Omega_V = [3l, 6l] \times [-l, 2l] \times [-l, 2l]$:

1. Tracez en fonction du temps les fonctions $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_V} \rho d\Omega$ et $\int_{\Omega_V} \rho d\Omega$. Commentez l'allure de ces courbes.
2. Répétez l'analyse du point (1) en considérant le bilan de la quantité de mouvement à la place de celui de masse sur le volume Ω_V.

2 Calcul indirect de forces hydrodynamiques

Mesurer la portance et la traînée d'un solide dans un fluide par des mesures des forces de contact $\underline{T}$ sur sa paroi peut parfois s'avérer peu pratique, notamment quand la paroi a une forme très irrégulière (par exemple la peau d'un requin). Il est possible dans ce cas d'effectuer les mesures dans le fluide environnant et obtenir le résultat voulu en exploitant les équations de conservation en forme intégrale. Considérez un volume de contrôle fixe occupé, au temps t_0, par un milieu continu constitué d'un solide (occupant le domaine $\Omega_S \subset \Omega_V$ avec $\partial\Omega_S \bigcap \Omega_V = \emptyset$) immergé dans un fluide occupant le reste du domaine de contrôle ($\Omega_V = \Omega_S \cup \Omega_F$). Supposez que :
(a) la frontière du solide a vitesse nulle dans le référentiel choisi
(b) la densité et la vitesse sont stationnaires ($\rho = \rho(\underline{x}), \underline{U} = \underline{U}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega_V$)
(c) les forces volumiques sont négligeables ($\underline{F} = \underline{0}$),
(d) la surface du solide est imperméable.

Démontrez que, sous ces hypothèses, il est possible de calculer la force de contact totale (force aéro- ou hydrodynamique) que le fluide exerce sur le solide en mesurant seulement des quantités définies sur $\partial\Omega_V$. Quelles sont ces quantités ?

Pour résoudre ce problème vous aurez préalablement à démontrer les deux point suivants :

1. Considérez le champ tensoriel b et deux domaines $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ dont les frontières se déplacent à vitesse $\underline{V}_1$ et $\underline{V}_2$ respectivement et montrez que à un instant t_* où $\Omega_1(t_*) = \Omega_2(t_*)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_2 = \int_{\partial\Omega_*} b \otimes (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}a \qquad \text{où} \qquad I_1(t) = \int_{\Omega_1} b\, \mathrm{d}\Omega,\ I_2(t) = \int_{\Omega_2} b\, \mathrm{d}\Omega$$

2. Démontrez ensuite que l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit de la façon suivante sur un domaine $\Omega(t)$ en général *non* matériel dont la vitesse de la frontière est dénotée par $\underline{V}$:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\underline{U}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}\rho\underline{U}\otimes(\underline{V}-\underline{U})\cdot\underline{n}\mathrm{d}a + \int_\Omega \rho\underline{F}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega}\underline{T}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}a$

3 Mouvement d'un corps déformable à masse variable

Nous nous intéressons au mouvement d'un système déformable à masse variable, tel un calamar qui nage, une fusée en vol, une goutte d'eau qui évapore sur un coté, un véhicule qui se déforme en "perdant des pièces" en impactant un obstacle, etc.. Ce type de système, étant à masse variable, n'est pas associé à un domaine matériel mais à un domaine géométrique Ω_V défini à l'aide de l'intuition physique. La masse et la position du centre de masse de ce système sont respectivement définies par :

$$m(t) = \int_{\Omega_V}\rho d\Omega, \quad m(t)\,\underline{x}_{CM}(t) = \int_{\Omega_V}\rho\underline{x}d\Omega$$

Nous voulons trouver une expression pour $md^2\underline{x}_{CM}/dt^2$ faisant intervenir seulement des quantités définies sur la frontière du système $\partial\Omega_V$ (à l'exception de la distribution de la densité et des forces de volume externes). Pour cela faire vous devrez utiliser le résultat du point 1 de l'exercice 2 et ensuite :

1. Montrer que $m(t)$ et $\underline{x}_{CM}(t)$ vérifient :

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \int_{\partial\Omega_V}\rho\,(\underline{V}-\underline{U})\cdot\underline{n}\mathrm{d}a\\ m\dot{\underline{x}}_{CM} &= \int_{\partial\Omega_V}\rho(\underline{x}-\underline{x}_{CM})\,(\underline{V}-\underline{U})\cdot\underline{n}\mathrm{d}a + \int_{\Omega_V}\rho\underline{U}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

2. En déduire que :

$$\begin{aligned}m\ddot{\underline{x}}_{CM} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial\Omega_V}\rho(\underline{x}-\underline{x}_{CM})\,(\underline{V}-\underline{U})\cdot\underline{n}\mathrm{d}a\\ &\quad+\int_{\partial\Omega_V}\rho(\underline{U}-\dot{\underline{x}_{CM}})\,(\underline{V}-\underline{U})\cdot\underline{n}\mathrm{d}a\\ &\quad+\int_{\Omega_V}\rho\underline{F}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_V}\underline{T}\,\mathrm{d}a\end{aligned}$$

Interpréter physiquement chacun des termes du membre de droite.