PC5 : Contraintes

(stegner@lmd.ens.fr ;http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431)

1 Contraintes dans un parallèlépipède

On considère en configuration actuelle rapportée à un repère cartésien un bloc défini par :

$$\Omega_t = \{0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \quad 0 \leq x_3 \leq h.$$

1. Indiquer les efforts appliqués sur $\partial\Omega_t$ en équilibre avec un champ de contrainte de la forme
$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$
Qualifier qualitativement ce champ de contraintes. Rappeler l'unité physique dans laquelle s'exprime σ.

2. On considère un deuxième champ de contraintes :
$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \tau \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1\right)$$
   (a) Indiquer les efforts appliqués sur $\partial\Omega_t$ en équilibre avec ce champ de contrainte. Le qualifier qualitativement

   (b) On isole par la pensée une boule Ω'_t incluse dans Ω_t. Ainsi en fonction du point $\underline{x}$ de $\partial\Omega'_t$, le vecteur $\underline{n}(\underline{x}, \partial\Omega'_t)$ normal en $\underline{x}$ à $\partial\Omega'_t$ peut prendre n'importe quelle direction. Montrer qu'il existe des facettes de Ω'_t subissant un effort parallèle à $\underline{n}$ et d'autres subissant un effort orthogonal à $\underline{n}$.

2 Sphère sous pression

On considère une sphère creuse Ω_t de rayon intérieur $R - e/2$ et de rayon extérieur $R + e/2$. Cette sphère est remplie d'un fluide sous pression uniforme p_0 et baigne dans un fluide à la pression uniforme p_1. On néglige les efforts volumiques issus de la pesanteur.

1. Expliciter les conditions aux limites pour le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Les efforts extérieurs sont-ils compatibles avec l'équilibre de la sphère ?

2. En tenant compte de la symétrie du problème trouvez un champ de contrainte simple $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base locale des coordonées sphériques $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\phi$.

3. En étudiant l'équilibre global d'une demi-sphère, calculer la valeur moyenne
$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{eR} \int_{R-e/2}^{R+e/2} r \sigma_{\theta\theta}(r) \mathrm{d}r$$
dans la limite où $e \ll R$.

4. La sphère est faite d'un matériau de Tresca, de contrainte limite σ_0: ses déformations sont réversibles tant que

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_{i,j}\{\sigma_i - \sigma_j - \sigma\} \leq 0.$$

Montrer que la sphère ne peut supporter une surpression $\delta p = |p_0 - p_1|$ supérieure à une valeur p_{max} que l'on précisera.