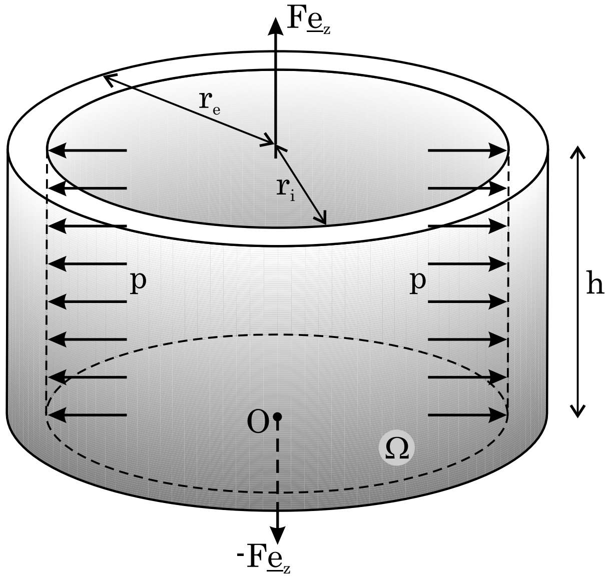
PC6-Tenseur des contraintes de Cauchy

(stegner@lmd.ens.fr ;http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431)

1 Champ de contrainte dans un réservoir cylindrique sous pression.

On considère un milieu continu constitué d'une portion de cylindre de révolution de hauteur h, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e. On choisit une origine O, de sorte que Ω soit défini par : $r_i \leq r \leq r_e$ et $0 \leq z \leq h$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir figure ci-dessous). Dans cette configuration, ce tube est soumis à une pression uniforme p sur sa paroi latérale interne, la paroi latérale externe étant libre de contrainte. L'extrémité supérieure est soumise à des efforts surfaciques homogènes $F\underline{e}_z$ et l'extrémité inférieure aux efforts surfaciques $-F\underline{e}_z$. On néglige les efforts volumiques issus de la pesanteur.



1. Les efforts extérieurs sont-ils compatibles avec l'équilibre du tube ?

2. Expliciter l'équation d'équilibre et les conditions aux limites pour le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$.

3. On dit qu'un champ de contrainte est à symétrie cylindrique si ses composantes dans la base locale des coordonnées cylindriques ne dépendent que de r. À quelles conditions un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ à symétrie cylindrique équilibre-t-il les efforts extérieurs considérés ?

4. Déterminer les constantes A, B, et C pour que le champ :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, z) = \left(A - \frac{B}{r^2}\right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(A + \frac{B}{r^2}\right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + C \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

   équilibre les efforts extérieurs considérés.

5. On suppose maintenant que ce tube constitue le corps d'un réservoir cylindrique refermé à ses deux extrémités par des calottes de forme inconnue et contenant un fluide à la pression p. Quelle est la seule valeur de F compatible avec cette situation ?

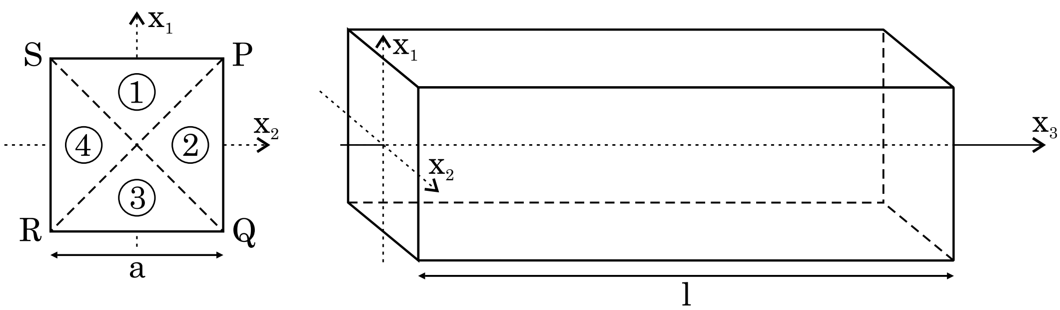
6. En supposant le champ de contrainte à symétrie cylindrique, calculer la valeur moyenne :

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr$$

On interprétera alors le résultat obtenu notamment lorsque le tube est mince.

2 Contraintes dans une poutre de section carrée.

Une poutre cylindrique, de longueur l, de section carrée de coté a, dans sa configuration d'équilibre, est soumise à des efforts extérieurs exclusivement exercés sur ses sections extrémales (voir figure ci-dessous). Sur la section S_l (définie par $x_3 = l$), la résultante des forces de contact est nulle et le moment résultant par rapport au centre de la section est de la forme $C\underline{e}_3$, C étant donné.



1. Déterminer la résultante et le moment résultant des efforts extérieurs s'exerçant sur la section S_0 ($x_3 = 0$).

2. On considère les quatre domaines cylindriques Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4, d'axe dirigé par $\underline{e}_3$ et s'appuyant respectivement sur chacun des quatre triangles OSP, OPQ, OQR et ORS. Quels sont les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^i$, constants dans chacun des quatre domaines Ω_i, qui équilibrent les efforts extérieurs appliqués sur la poutre ?

3. On suppose que le critère exprimant la charge limite dans la poutre est le critère de Tresca, dit de *cission maximale* :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup_{i,j=1,2,3} \{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0\} \leq 0$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales et σ_0 une constante positive caractéristique du matériau constitutif de la poutre. Dans l'hypothèse où le champ de contrainte s'établissant dans la poutre à l'équilibre serait celui décrit à la question précédente, calculer la valeur maximale du couple C supportable pour la poutre.