PC7-Principe des puissances virtuelles

(stegner@lmd.ens.fr ;http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431)

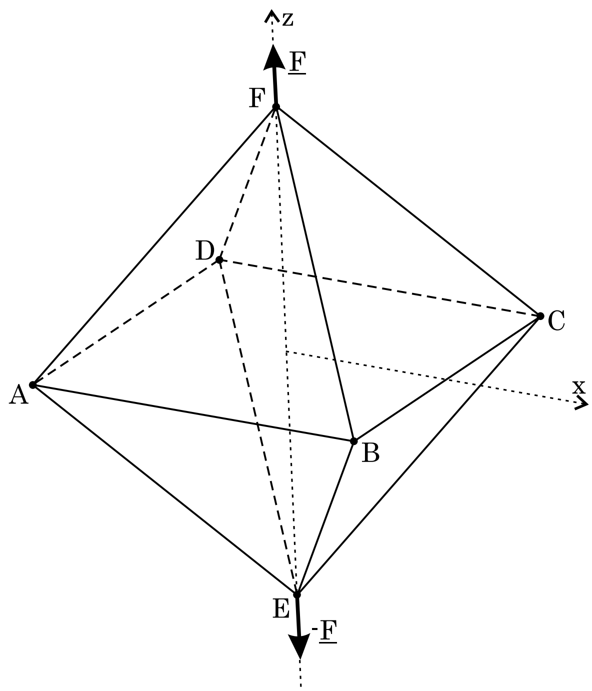
1 Modélisation d'une structure articulée.

Certaines structures métalliques sont faites d'assemblages de barres (tour Eiffel, pont métallique, systèmes de tenségrité, etc.). Le chargement de la structure est souvent supporté directement par ses noeuds. Ainsi, il peut sembler utile (et économe en calcul) de modéliser la géométrie, le chargement et les efforts internes de ces objets, de manière plus simple que pour le milieu tridimensionnel classique.
On propose ci-dessous une approche de ce type, la plus simple qui soit pour ces structures particulières, de façon notamment à construire, grâce à la méthode des puissances virtuelles, une modélisation des efforts internes adaptée, et d'en déduire les lois mécaniques qui gouvernent ce modèle. On s'intéresse à un ensemble de p barres rectilignes articulées (hypothèse restrictive : en chaque noeud, le moment exercé sur l'extrémité concernée de la barre est nul). Dans l'assemblage, une barre est exactement représentée par 2 noeuds distincts à ses extrémités ; un noeud peut appartenir à plus de 2 barres. Le chargement (efforts extérieurs) est concentré aux noeuds : il se compose donc uniquement de forces. Par ailleurs, on ne traite que des problèmes statiques.

1. Précisez l'ensemble des mouvements virtuels (mv) et la forme des puissances virtuelles de la quantité d'accélération $A(\underline{\hat{U}})$, des efforts extérieurs $P_{(e)}(\underline{\hat{U}})$ et des efforts intérieurs $P_{(i)}(\underline{\hat{U}})$.
2. On considère le sous-système formé d'une seule barre, la barre *IJ* et on appelle $\underline{e}_{IJ}$ le vecteur normé porté par IJ et orienté du noeud i vers le noeud j. Appliquez le premier énoncé du PPV à ce sous-système. En déduire que la puissance vitrtuelle des efforts intérieurs s'écrit sous la forme générale :

$$P_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = -\chi_{IJ}\hat{\dot{\delta}}_{ij}$$

   avec $\hat{\dot{\delta}}_{ij} = (\underline{\hat{U}}_j - \underline{\hat{U}}_i).\underline{e}_{IJ}$ le *taux d'allongement virtuel* de la barre et χ_{IJ} un scalaire dont vous préciserez le sens physique.
3. On considère maintenant le système complet constitué de p barres assemblées par n rotules. Exprimez, d'aprés ce qui pércède la puissance virtuelle des efforts intérieurs. En déduire, en utilisant le deuxième énnoncé du PPV, la relation entre la force extérieure $\underline{F}_i$ appliquée au noeud i et les χ_{IJ}.
4. On considère la structure dessinée ci-dessous, formée de 12 barres identiques, de longueur l, formant deux pyramides renversées, de bases carrées et horizontales. Le chargement consiste en deux forces égales et opposées d'intensité F (le torseur formé par ces efforts extérieurs est bien nul).



Déterminer successivement la tension dans les barres horizontales, puis la tension dans les barres inclinées, en utilisant le PPV. L'idée est de chercher des mv particuliers qui permettent, par application du PPV, d'atteindre directement l'inconnue recherchée. Il s'agit donc de proposer un mv qui rigidifie la partie de la structure qui ne nous intéresse pas, c'est-à-dire tel que la restriction à cette partie de la structure soit un mvr.

2 Mouvement d'une membrane sphérique

On considère les mouvements à symétrie sphérique d'une membrane de rayon $R(t)$ de centre O immobile par rapport à un référentiel galiléen. Sa masse est M et la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans un mouvement virtuel du type $\underline{\hat{U}} = \hat{u}\underline{e}_r$ est supposée être de la forme $\mathcal{P}_i(\underline{\hat{U}}) = -F(R)\hat{u}$ où F est donnée.

1. Donner l'équation régissant $R(t)$ si la membrane est isolée. Que se passe-t-il dans le cas où $F(R) = K(R - R_0)$, K et R_0 positifs.
2. La membrane est entourée d'un fluide homogène incompressible, de masse volumique ρ_f s'étendant jusqu'à l'infini. Montrez que pour le milieu fluide (on considère ici un fluide parfait) la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle pour tout mouvement virtuel respectant l'incompressibilité.
3. On considère maintenant le sytème membrane-fluide. La puissance virtuelle des efforts de contact membrane-fluide est nulle pour tout mouvement respectant ce contact. Le système membrane-fluide est isolé.
   (a) Donner l'équation pour $R(t)$.
   (b) Etudier les petits mouvements si $F(R) = K(R - R_0)$.