Directions et dilatations principales du tenseur de Cauchy

$$\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} \quad avec \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla\phi}}$$

Propriétés :

1. Le tenseur de Cauchy est **symétrique** et **réel** :

$$^t\underline{\underline{C}} = {}^t({}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{C}}$$

2. La forme quadratique associée :

$$\forall X \in E \ \underline{X}.\underline{\underline{C}}.\underline{X} = (\underline{\underline{F}}.\underline{X}).(\underline{\underline{F}}.\underline{X}) > 0$$

est **définie positive**.

Il en découle :

1. Les **vecteurs propres** sont **orthogonaux** et constituent une base de E. Chaque vecteur propre défini une ***direction principale***.
2. Les **valeurs propres** (ou ***valeurs principales***) sont **réelles et positives**.

Diagonalisation du tenseur des dilatations

On peut construire une **base orthonormée** $\{\underline{e}_i\}$correspondant aux **directions principales**. Dans cette base, le tenseur $\underline{\underline{C}}$ est **diagonale** :

$$\underline{\underline{C}} = \lambda_i^2 \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$$

La **valeur principale** λ_i^2 , associée à $\underline{v}_i = \alpha \underline{e}_i, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, correspond au **carrée de la dilatation** dans la direction principale $\underline{v}_i$:

$$\lambda_i = \lambda(\underline{v}_i) = \frac{|\underline{\underline{F}}.\underline{v}_i|}{|\underline{v}_i|} = \frac{\sqrt{\underline{v}_i.\underline{\underline{C}}.\underline{v}_i}}{|\underline{v}_i|}$$

Il en découle, $det(\underline{\underline{C}}) = (det(\underline{\underline{F}}))^2 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2$ et donc $det(\underline{\underline{F}}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Propriété : L'image par $\underline{\underline{F}}$ d'une base othonormé propre $\{\underline{e}_i\}$ de $\underline{\underline{C}}$ est une base orthogonale$\{\underline{\underline{F}}.\underline{e}_i\}$. **Réciproquement** tout trièdre othogonal dont l'image par $\underline{\underline{F}}$ est un trièdre orthogonal est constitué de vecteurs propres de $\underline{\underline{C}}$.

Décomposition polaire

Peut-on écrire le tenseur $\underline{\underline{F}}$, vérifiant $0 < det(\underline{\underline{F}}) < \infty$, sous la forme :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{S}}$$

avec $\underline{\underline{R}}$ **rotation** et $\underline{\underline{S}}$ **symétrique positif ?**

Solution :

1. On diagonalise $\underline{\underline{C}} =^t \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} : \underline{\underline{C}} = \lambda_i^2 \underline{e_i} \otimes \underline{e_i}$

2. Tenseur de ***déformation pure*** : $\underline{\underline{S}} = \sqrt{\underline{\underline{C}}} = \lambda_i \underline{e_i} \otimes \underline{e_i}$

   Propriétés : $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{S}}.\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{S}}.\underline{e_i} = \lambda_i \underline{e_i}$

3. Le tenseur de ***rotation*** s'écrit : $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{S}}^{-1}$

   Propriétés : ${}^t\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$et $\underline{\underline{R}}.\underline{e_i} = \underline{e}'_i$