Principes généraux du calcul à la rupture.

(*stegner@lmd.ens.fr http ://gershwin.ens.fr/stegner/PC-Mec431*)

13 novembre 2004

Voici quelques précisions (et corrections des questions posées) sur les principes généraux du calcul à la rupture introduit lors des séances de mise en oeuvre.

1 Critères de Tresca et de von Mises.

Les critères de Tresca et von Mises utilisent une fonction de charge $f(\underline{\underline{\sigma}})$ qui détermine un domaine d'élasticité initial du matériau. Si le tenseur des contraintes reste à l'intérieur de ce domaine $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$, le comportement du matériau demeure élastique.
La fonction de charge correspondant au ***critère de Tresca*** s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = sup_{(i,j)}\left\{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0\right\}$$

où les σ_i correspondent aux contraintes principales et σ_0 une constante caractéristique du matériau.
La fonction de charge correspondant au ***critère de von Mises*** s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} - k$$

ou le tenseur $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ est le déviateur du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et k une constante caractéristique du matériau.

Dans le cadre du calcul à la rupture, on utilise ces critères pour déterminer un domaine de resistance à la rupture. En d'autre terme lorsque $\forall \underline{x}\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) < 0$ le matériau ne se déforme pas et lorsque $\exists \underline{x}\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) = 0$ il y a rupture au point considéré. Ce type de comportement corresponderait au cas d'un matériau rigide-plastique.

1. *Montrer que les critères de Tresca et Mises ne dépendent pas de la pression, à savoir :*

   $$\forall p \in \mathbb{R}\ f(\underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{\mathbf{1}}}) = f(\underline{\underline{\sigma}})$$

   Pour le critère de Tresca, on verifie directement que : $f(\underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{\mathbf{1}}}) = sup_{(i,j)}(\sigma_i - p - (\sigma_j - p) - \sigma_0) = f(\underline{\underline{\sigma}})$. Pour le critère de Mises, ce résultat provient du fait que le déviateur du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est indépendant de la pression : $\underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{\mathbf{1}}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} = \underline{\underline{\sigma}} - tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} = \underline{\underline{s}}$. Ainsi, pour un champ de contrainte correspondant à un champ de pression uniforme $\forall p \in \mathbb{R}\ f(-p\underline{\underline{\mathbf{1}}}) \leq 0$, les critères de Tresca et Mises sont toujours vérifiés. L'épave d'un navire qui coule au fond de l'océan ne se déformera pas sous plusieurs centaines de bars de pression si pression interne et externe sont équilibrées.

2. *On pourra vérifier que le critère de Mises s'écrit également en fonction des contraintes principales* $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ *sous la forme :*

   $$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2\right]} - k \leq 0$$

En utilisant l'expression de la partie déviatorique du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base des contraintes principales : $\underline{\underline{s}} = \frac{1}{3}\left[(2\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3))\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + permutations\, circulaires\right]$on en déduit, $\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{2}{3}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right] = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2\right]$et on retrouve ainsi l'expression de $f(\underline{\underline{\sigma}})$ ci-dessus.

3. *Montrez que les fonctions de charge $f(\underline{\underline{\sigma}})$ correspondant à ces critères sont convexes, à savoir :*

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}_1, \underline{\underline{\sigma}}_2 si\, 0 \leq \lambda \leq 1 \;\; f(\lambda\underline{\underline{\sigma}}_1 + (1-\lambda)\underline{\underline{\sigma}}_2) \leq \lambda f(\underline{\underline{\sigma}}_1) + (1-\lambda) f(\underline{\underline{\sigma}}_2)$$

Critère de Tresca :
Dans le cas général, les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}_1$ et de $\underline{\underline{\sigma}}_2$ sont distinctes. On utilise alors la base $\{\underline{e}_i^*\}$ des directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}^* = \lambda\underline{\underline{\sigma}}_1 + (1-\lambda)\underline{\underline{\sigma}}_2$ et on vérifie $\forall i\,,\, j = (1,2)\ \sigma_j^- < \underline{e}_i^* . \underline{\underline{\sigma}}_j . \underline{e}_i^* < \sigma_j^+$ avec (σ_j^-, σ_j^+) les valeurs inférieure et supérieure des contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}_j$. On en déduit que les contraintes principales $\sigma_i^* = \underline{e}_i^* . \underline{\underline{\sigma}}^* . \underline{e}_i^*$ de $\underline{\underline{\sigma}}^*$sont bornées par $\lambda\sigma_1^- + (1-\lambda)\sigma_2^- < \sigma_i^* < \lambda\sigma_1^+ + (1-\lambda)\sigma_2^+$. Il en résulte $0 < \left|\sigma_i^* - \sigma_j^* - \sigma_0\right| < \lambda(\sigma_1^+ - \sigma_1^- - \sigma_0) + (1-\lambda)(\sigma_2^+ - \sigma_2^- - \sigma_0)$ et par conséquent la convexité de la fonction de charge.
Critère de von Mises :
L'inégalité de Minkowski s'applique au produit doublement contracté, ainsi $\sqrt{\underline{\underline{s}}^* : \underline{\underline{s}}^*} \leq \lambda\sqrt{\underline{\underline{s}}_1 : \underline{\underline{s}}_1} + (1-\lambda)\sqrt{\underline{\underline{s}}_2 : \underline{\underline{s}}_2}$ en utilisant le déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}^* = \lambda\underline{\underline{s}}_1 + (1-\lambda)\underline{\underline{s}}_2$de $\underline{\underline{\sigma}}^*$. Ceci assure la convexité de la fonction de charge.

4. *Calculer le rapport entre contraîntes maximales de traction σ_T^+ et de cission σ_C^+, pour les deux critères.*
En réalisant un essai en traction à l'aide d'une "éprouvette" spécialement construite pour cela on peut générer un champ de contraînte uniaxiale a peu prés uniforme et accéder à la limite de rupture (ou limite d'élasticité) du matériau. Dans la base des contraîntes principales le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}_T$s'écrit $\underline{\underline{\sigma}}_T = \sigma_T \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$. Un essai en cission sur une eprouvette cylindrique génère une contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_c = \sigma_{r\theta}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) = \sigma_C(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$ dont les contraintes principales sont $\sigma_C = \pm\sigma_{r\theta}$. On vérifie d'une part pour le critère de Tresca que les limites de ruptures sont $\sigma_T^+ = \sigma_0$en traction, $\sigma_C^+ = \frac{1}{2}\sigma_0$en cission et le rapport σ_T^+/σ_C^+vaut 2. D'autre part, pour le critère de Mises, les limites de ruptures sont $\sigma_T^+ = \sqrt{3}k$ en traction, $\sigma_C^+ = k$ en cission et le rapport σ_T^+/σ_C^+vaut $\sqrt{3}$. Pour le métaux, le rapport précédent est plus proche de $\sqrt{3}$ que de 2 ce qui conduit à utiliser préférentiellement le critère de Mises.

2 Approche statique par l'intérieur.

Un ***chargement*** correspond à un ensemble de forces extérieures (volumique $\underline{f}$ ou surfacique $\underline{T}$) appliqué à un milieu continu matériel. On définit généralement le chargement par un vecteur $\underline{Q}$ dont la dimension est fixée par le nombre de paramètres indépendants qui contrôlent les forces extérieures.

Un champ de contrainte est ***Statiquement Admissible*** (*S.A.*) si il vérifie les équations de la dynamique (c.f. Chapitre V, 3.13, 3.14 et 3.15) dans le cas statique avec $\underline{a} = 0$.

Un chargement $\underline{Q}$ est ***potentiellement supportable*** au sens du calcul à la rupture si il existe, pour ce chargement, au moins un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible qui vérifie le critère de résistance $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$. Le terme "potentiellement" indique que le champ de contrainte calculé n'est pas nécessairement celui qui sera effectivement réalisé dans le matériau. Donc rien ne garantie qu'un chargement potentiellement supportable soit effectivement supporté. Sans précisions supplémentaires sur les propriétés mécanique du matériau considéré ni son état de "fatigue", il existe en générale plusieurs champs de contrainte statiquement admissible pour un chargement donnée.

On peut montrer que le domaine K des chargements $\underline{Q}$ supportables est convexe. En effet, dans le cas statique ($\underline{a}=0$) , les équation de la dynamique sont linéaires par rapport au chargement. En d'autres termes si les champs $\underline{\underline{\sigma}}_1$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$(avec leurs conditions limites respectives) sont statiquement admissibles alors $\underline{\underline{\sigma}}^* = \lambda \underline{\underline{\sigma}}_1 + (1-\lambda)\underline{\underline{\sigma}}_2$ l'est également. De plus, si $\underline{\underline{\sigma}}_1$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$vérifient un critère de résistance $f(\underline{\underline{\sigma}}_i) < 0$ alors si $\lambda \in [0,1]$ la convexité de la fonction de charge assure la convexité du domaine K : $f(\underline{\underline{\sigma}}^*) < 0$ et $\underline{\underline{\sigma}}^*$ statiquement admissible.

L'approche par l'intérieur consiste à trouver des champs de contraintes qui augmentent le domaine K des chargements $\underline{Q}$ supportables. On trouve ainsi des vecteurs $\underline{Q}_{min}$qui bornent par l'intérieur la frontière $\underline{Q}^+$ du domaine K. On ne demande pas de trouver La solution, car il n'y a pas une solution unique, mais plusieurs solutions raisonnables. L'éfficacité de la solution se vérifie par la qualité de la borne déduite.

3 Approche cinématique par l'extérieur

Pour un chargement donné, on écrit la puissance virtuelle des efforts extérieurs sous la forme :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega \underline{\hat{U}}.\underline{f}\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\hat{U}}.\underline{T}\, dS = \underline{Q}.\underline{q}(\underline{\hat{U}})$$

ou $\underline{q}(\underline{\hat{U}})$ est un vecteur dépendant uniquement du champ de vitesse virtuelle $\underline{\hat{U}}$. Dans le cas statique, on vérifie $P_e(\underline{\hat{U}}) = -P_i(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\left[\underline{\hat{U}}\right] dS$. On cherche ensuite une borne $P_{limite}(\underline{\hat{U}})$ de $P_e(\underline{\hat{U}})$ indépendante du champ de contrainte. Pour cela, on calcul les $sup(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}})$ et $sup((\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\left[\underline{\hat{U}}\right])$ sur l'ensemble G des champs de contraintes (statiquement admissible ou non) vérifiant le critère de résistance $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$. Comme le critère de résitance est vérifié à un champ de pression prés $sup(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}} + \alpha \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\hat{d}}}) = sup(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}) + \alpha tr(\underline{\underline{\hat{d}}})$ si le champs de vitesse virtuel n'est pas incompressible ($tr(\underline{\underline{\hat{d}}}) \neq 0$) alors $sup_G(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}) = +\infty$. De même, on vérifie que $sup(\,(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\left[\underline{\hat{U}}\right] + \alpha(\underline{\underline{\mathbf{1}}}.\underline{n}).\left[\underline{\hat{U}}\right]\,) = sup(\,(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\left[\underline{\hat{U}}\right]\,) + \alpha\left[\underline{\hat{U}}\right].\underline{n}$ si la discontinuité de vitesse n'est pas normale à S($\left[\underline{\hat{U}}\right].\underline{n} \neq 0$) alors $sup_G((\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\left[\underline{\hat{U}}\right]) = +\infty$. Ainsi pour les champs de vitesse virtuelles vérifiant $tr(\underline{\underline{\hat{d}}}) = 0$ et $\left[\underline{\hat{U}}\right].\underline{n} = 0$ on peut calculer une borne $P_{limite}(\underline{\hat{U}})$ finie. Dans ce qui suit, on note $\underline{\underline{\sigma}}^+$ un champ de contrainte quelconque se trouvant à la limite de rupture $f(\underline{\underline{\sigma}}^+) = 0$.

Critère de Tresca

On ordonne les contraines principales de $\underline{\underline{\sigma}}^+$ telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Dans ce cas on peut écrire $\underline{\underline{\sigma}}^+ : \underline{\underline{\hat{d}}} = (\sigma_1 - \sigma_3)\hat{d}_1 + (\sigma_2 - \sigma_3)\hat{d}_2$en utilisant $tr(\underline{\underline{\hat{d}}}) = 0$. Il en découle, $\underline{\underline{\sigma}}^+ : \underline{\underline{\hat{d}}} \leq (\sigma_1 - \sigma_3)(\hat{d}_1 + \hat{d}_2) \leq \sigma_0(|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2|) \leq \frac{1}{2}\sigma_0(|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|)$. Il en découle :

$$P_{limite}(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\sigma_0(|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|)\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma_0 \left\| \left[\underline{\hat{U}}\right] \right\| dS$$

Critère de von Mises

On verifie immédiatement que $\underline{\underline{s}}^+ : \underline{\underline{s}}^+ = 2k^2$et $\underline{\underline{s}}^+ : \underline{\underline{\hat{d}}} = \underline{\underline{\sigma}}^+ : \underline{\underline{\hat{d}}}$. On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwartz $\underline{\underline{s}}^+ : \underline{\underline{\hat{d}}} \leq \sqrt{\underline{\underline{s}}^+ : \underline{\underline{s}}^+}\sqrt{\underline{\underline{\hat{d}}} : \underline{\underline{\hat{d}}}}$ pour montrer que $sup_G(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}) = k\sqrt{2\underline{\underline{\hat{d}}} : \underline{\underline{\hat{d}}}}$. Il en découle :

$$P_{limite}(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega k\sqrt{2\underline{\underline{\hat{d}}} : \underline{\underline{\hat{d}}}}\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} k \left\| \left[\underline{\hat{U}}\right] \right\| dS$$

Pour qu'un chargement soit supportable, il est nécessaire que, pour tout champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible, la puissance des efforts appliqués soit bornée :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) \leq P_{limite}(\underline{\hat{U}})$$

Le choix d'un champ de vitesse virtuelle adapté permet de donner une borne par l'extérieur du domaine$K$.