

# Turbulence. Couche limite

V. Zeitlin

M1 MOCIS

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

## Introduction

## Ecoulement moyen et pulsations turbulentes. Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds

Équations de Reynolds

Problème de fermeture. Viscosité turbulente

## Couche limite

Couche limite stratifiée

Couche limite dans le fluide tournant

## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs turbulence 3D

### Introduction

### Écoulement moyen et pulsations turbulentes. Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

### Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide tournant

### Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs turbulence 3D

# Écoulements turbulents vs laminaires

Turbulence.  
Couche limite



## Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

## Couche limite

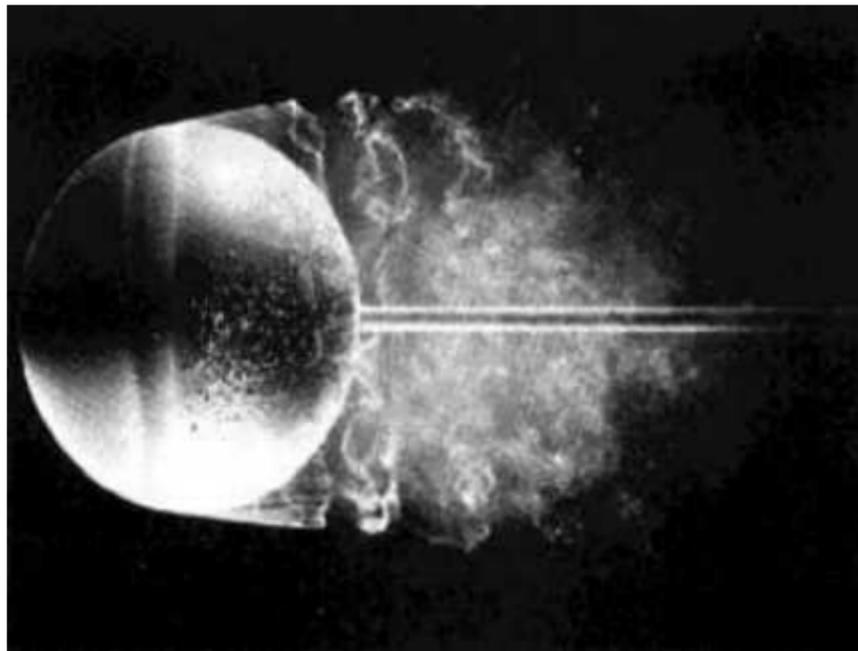
Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Turbulence derrière un obstacle

Turbulence.  
Couche limite



## Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

## Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

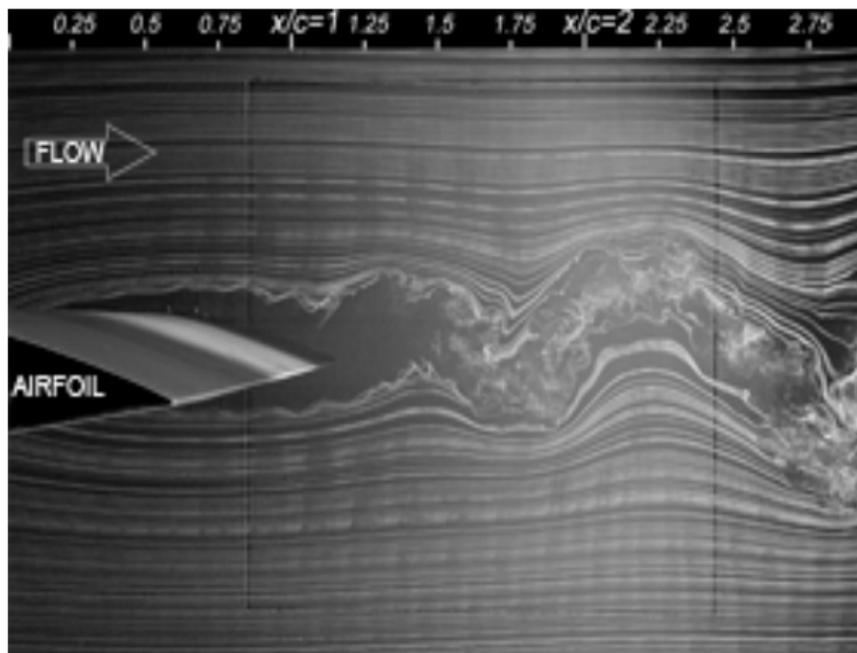
## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D



# Importance technologique

Turbulence.  
Couche limite



## Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

## Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Contexte géophysique - petite échelle : instabilité KH et la transition vers la turbulence

Turbulence.  
Couche limite

## Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

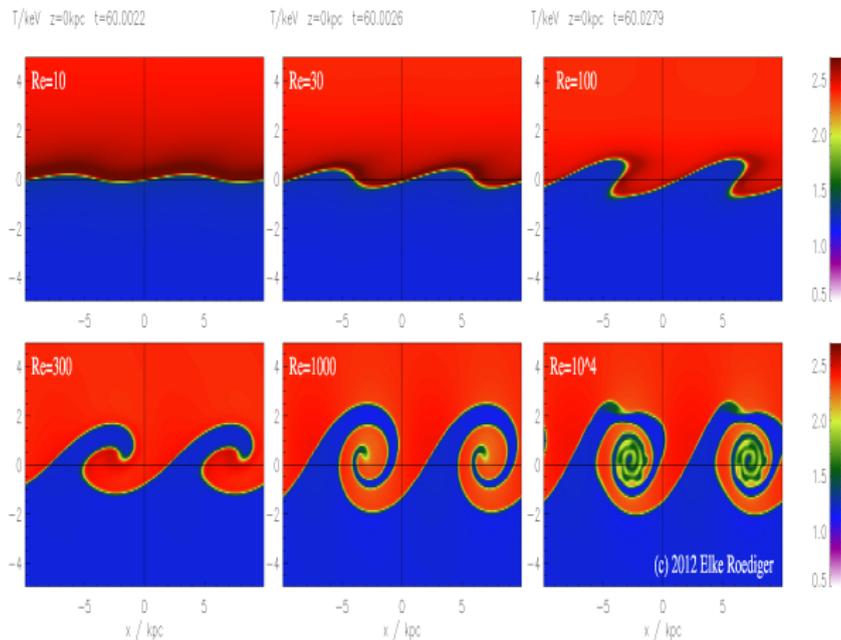
Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

## Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D





# Contexte géophysique - grande échelle : déferlement de l'onde de Rossby

Turbulence.  
Couche limite

## Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

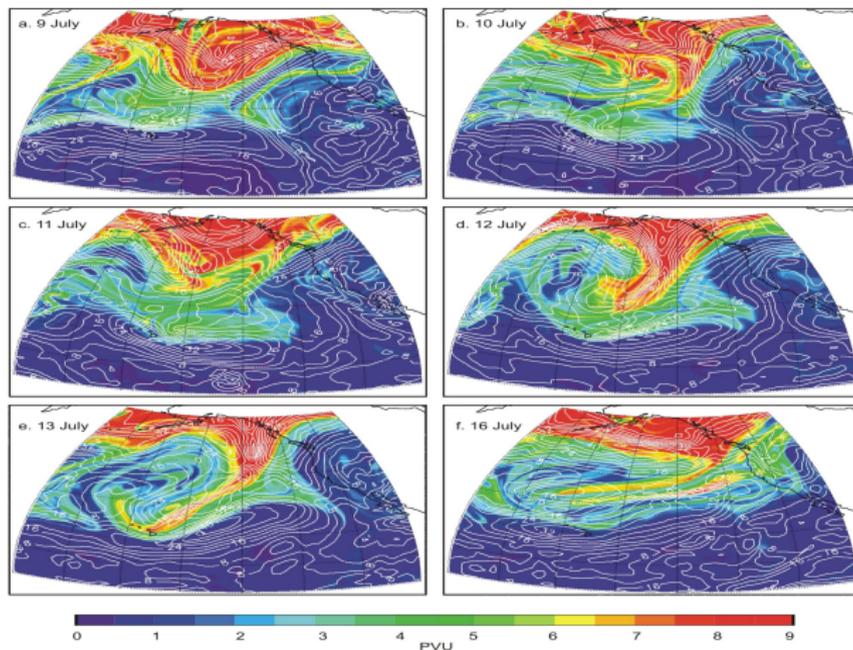
Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

## Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D







# Écoulement moyen et pulsations turbulentes

## Décomposition de Reynolds

Vitesse de l'écoulement turbulent :

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{u} \quad (1)$$

$\vec{U} = \langle \vec{v} \rangle$  - champ moyen,  $\vec{u}$  - fluctuations (pulsations) turbulentes :  $\langle \vec{u} \rangle = 0$

## Moyennes :

- ▶ d'ensemble, réalisations  $i$  :

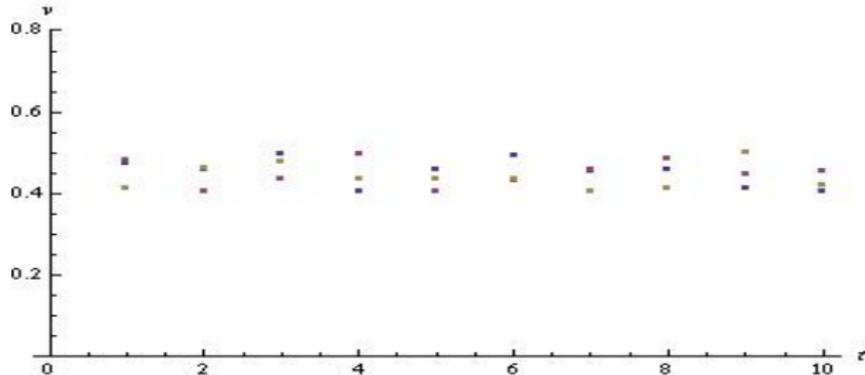
$$\langle \vec{v}(\mathbf{x}, t) \rangle_E = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}^{(i)}(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

- ▶ temporelle

$$\langle \vec{v}(\mathbf{x}, t) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} d\tau \vec{v}(\mathbf{x}, t + \tau) \quad (3)$$

# Approche statistique

Champs turbulents - fonctions (processus) aléatoires → réalisations



## Hypothèse ergodique

$$\langle \dots \rangle_E = \langle \dots \rangle_T$$

## Propriétés des moyennes :

- ▶  $\langle \langle \dots \rangle \rangle = \langle \dots \rangle$ ,  $\langle \text{const} \dots \rangle = \text{const} \langle \dots \rangle$
- ▶  $\langle A \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$ ,  $\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$

Introduction

Écoulement moyen et pulsations turbulentes.  
Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds

Équations de Reynolds

Problème de fermeture.

Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée

Couche limite dans le fluide tournant

Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs turbulence 3D

**Covariance** spatio-temporelle  $R_{ff}$  pour un processus  $f(\mathbf{x}, t)$  :  $R_{ff} = \langle f(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}', t') \rangle$ . Processus **homogène et stationnaire** :  $R_{ff} = R_{ff}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \Rightarrow$  différentiation spatio-temporelle commute avec la moyennisation.

**Densité spectrale** des corrélations :

$$S_{ff}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' d\mathbf{x}' e^{i[\omega(t-t') + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] } R_{ff}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds

Équations de Reynolds

Problème de fermeture.

Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée

Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Moyennisation des équations de mouvement

## Modèle :

fluide incompressible visqueux  $\Rightarrow \rho = \text{const} = 1$ ,  
équation Navier-Stokes, divergence de vitesse nulle.

## Moyennisation :

$$\left\langle \partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} p - \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \right\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_t \vec{U} + \left\langle \left( \vec{U} + \vec{u} \right) \cdot \vec{\nabla} \left( \vec{U} + \vec{u} \right) \right\rangle = -\vec{\nabla} P + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \Rightarrow$$

$$\partial_t \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \left\langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right\rangle = -\vec{\nabla} P + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U}.$$

$$\left\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right\rangle = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds

**Équations de Reynolds**

Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Équations de Reynolds

$$\langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \rangle \leftrightarrow \langle u_k \partial_k u_i \rangle = \partial_k \langle u_k u_i \rangle \equiv -\partial_k \tau_{ki}. \quad (4)$$

$\tau_{ki} = -\langle u_k u_i \rangle$ ,  $\tau_{ki} = \tau_{ik}$  - contraintes (tensions) de Reynolds.

Équation pour la vitesse moyenne :

$$\partial_t U_k + U_k \partial_t U_i = \partial_k \tau_{ki} - \partial_i P + \nu \vec{\nabla}^2 U_j. \quad (5)$$

Équation pour les pulsations

Équation Navier-Stokes moins l'équation pour la vitesse moyenne :

$$\partial_t \vec{u} + U_k \partial_k u_i + u_k \partial_k U_i + u_k \partial_k u_i = +\partial_k \tau_{ki} - \partial_i p + \nu \vec{\nabla}^2 u_j \quad (6)$$

Introduction

Écoulement moyen et pulsations turbulentes.  
Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds

Équations de Reynolds

Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide tournant

Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs turbulence 3D

# Énergie cinétique des pulsations turbulentes

Caractéristique de la turbulence : densité d'énergie des pulsations

$$e_p = \left\langle \frac{\vec{u}^2}{2} \right\rangle$$

Bilan d'énergie :  $\langle u_i(\text{équation pour les pulsations}) \rangle \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \partial_t e_p + U_k \partial_k e_p &= \tau_{ik} \partial_k U_i - \partial_k \left( \frac{1}{2} \langle u_i u_i u_k \rangle + \langle u_k p \rangle \right) \\ &+ \nu \vec{\nabla}^2 \langle u_k u_k \rangle - 2\nu \langle (\partial_k u_i)^2 \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

- advection par l'écoulement moyen, production par le cisaillement moyen, redistribution non-linéaire, dissipation.

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds

Équations de Reynolds

Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Problème de fermeture. Viscosité turbulente

Turbulence.  
Couche limite

Correlations (moments) de l'ordre + élevé entrent dans les équations pour les correlations de l'ordre - élevé → **hierarchy infinie** des équations. Solution : **fermetures** = imposition des expressions pour des moments + élevés.

## Fermeture niveau 1

Relation **flux - gradient**. Analogie avec la viscosité moléculaire :

$$\sigma_{ij} \propto \partial_i v_k + \partial_k v_i \rightarrow \tau_{ij} \propto \partial_i U_k + \partial_k U_j \quad (8)$$

Coefficient : **viscosité turbulente**  $\nu_T$

$$\tau_{ij} = \nu_T (\partial_i U_k + \partial_k U_j) \quad (9)$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

Analogie poussée + loin :  $\nu \propto l\bar{v}$ , où  $l$  - libre parcours moyen,  $\bar{v}$  - vitesse quadratique moyenne des molécules

→

$$\nu_t \sim l_* u_*, \quad (10)$$

avec  $l_*$  - **longueur de melange**,  $u_*$  - vitesse quadratique moyenne des pulsations  $\propto e_p^{\frac{1}{2}}$ .

Estimation en ordre de grandeur :

$$\tau_{ik} \sim u_*^2 \Rightarrow u_* \sim l_* \left| \vec{\nabla} U \right| \quad (11)$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds

Équations de Reynolds

Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée

Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

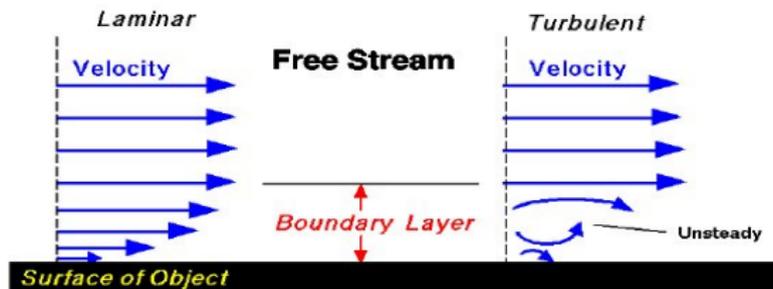
# Couche limite laminaire vs turbulente

Turbulence.  
Couche limite



## Boundary Layer

Glenn  
Research  
Center



Velocity is zero at the surface (no-slip)

Couche limite laminaire stationnaire d'extension infinie :

$$u = u(y), p = \text{const} \Rightarrow u \propto y$$

- **profil linéaire** de Newton. Constante de proportionnalité  $\sim \frac{\sigma}{\nu}$ ,  $\sigma = \sigma_{12}$  - flux vertical de la quantité de mouvement horizontale.

Introduction

Écoulement moyen et pulsations turbulentes.  
Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide tournant

Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs turbulence 3D

# Couche limite turbulente

Couche infinie - échelle de longueur : distance du fond  $y$ .  
Hypothèse de longueur de mélange :  $l_* = \kappa y$ ,  $\kappa$  -  
constante de von Karman.

Seule composante du gradient de l'écoulement moyen :  
 $\partial_y U \Rightarrow$  relation flux-gradient avec une seule composante  
de  $\tau$  :  $\tau_{12}$

$$u_* = \kappa y \partial_y U \Rightarrow U = \frac{u_*}{\kappa} (\log y + \text{const}) \quad (12)$$

- **profil logarithmique.**

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

$$Re_* = \frac{u_* y_0}{\nu} \sim 1 \Rightarrow y_0 \sim \frac{\nu}{u_*}$$

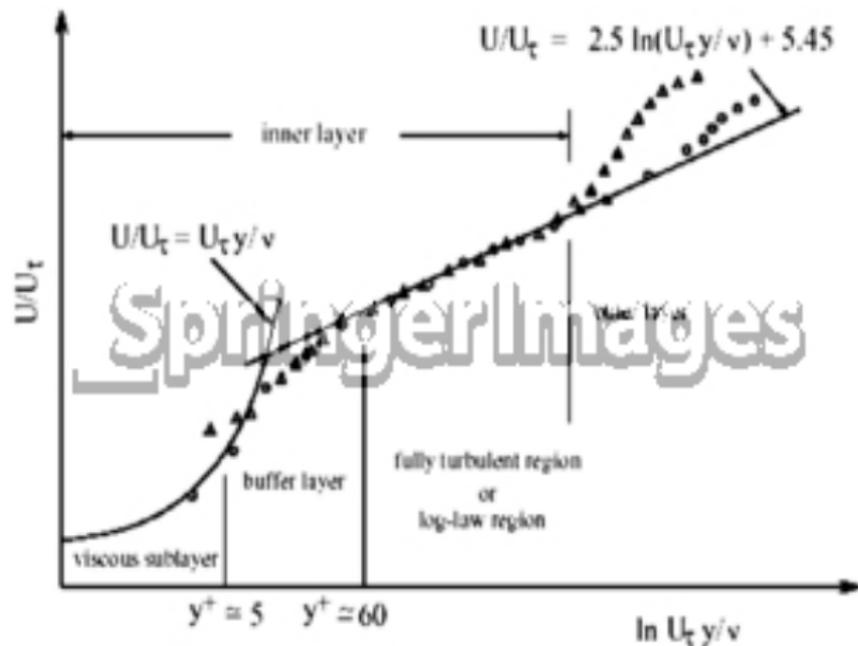
Flux de la quantité de mouvement constant  $\sigma$  :

- ▶ zone turbulente :  $\sigma = \tau_{12} = u_*^2$
- ▶ zone laminaire (sous-couche visqueuse) :  $\sigma = \nu \partial_y U$

Raccordement couche visqueuse - couche turbulente à  
 $y \sim y_0$  →

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \left( \log \frac{u_* y}{\nu} + \text{const} \right) \quad (13)$$

# Vérification expérimentale du profil logarithmique



## Introduction

Écoulement moyen et pulsations turbulentes.  
Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

## Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide tournant

## Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs turbulence 3D

# Équations de Reynolds en présence des effets thermiques et de la pesanteur

Fluide stratifié en approximation de Boussinesq.

Variables : vitesse  $\vec{v}$ , température potentielle  $\theta$ .

Décomposition moyenne/pulsations :

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{u}, \quad \theta = \Theta + \theta'; \quad p = P + p', \quad \rho = R + \rho'$$

Équations de Reynolds :

$$\begin{aligned} \partial_t U_k + U_k \partial_t U_i &= \partial_k \tau_{ki} + \nu \vec{\nabla}^2 U_i, \\ \partial_t \Theta + U_k \partial_t \Theta &= -\partial_k \langle u_k \theta' \rangle + \chi \vec{\nabla}^2 \theta' \end{aligned} \quad (14)$$

Relation hydrostatique pour les moyennes  $gR + \partial_z P = 0$  en supposant que les variations de pression dans les pulsations turbulentes sont petites par rapport aux celles de  $\rho$  and  $\theta$ , avec  $\rho'/R \approx \theta'/\Theta$ . Dans la suite :  $\frac{\rho'}{R} \approx -\frac{\theta'}{\Theta}$ .

Équation pour les pulsations de  $\theta$  :

$$\partial_t \theta' + u_k \partial_k \Theta + U_k \partial_k \theta' + u_k \partial_k \theta' = \partial_k \langle u_k \theta' \rangle + \chi \vec{\nabla}^2 \theta'. \quad (15)$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Bilan d'énergie des pulsations turbulentes

## Énergie potentielle

$$\begin{aligned} \partial_t \left\langle \frac{\theta'^2}{2} \right\rangle + U_k \partial_k \left\langle \frac{\theta'^2}{2} \right\rangle = \\ - \langle u_k \theta' \rangle \partial_k \Theta - \partial_k \left\langle \frac{\theta'^2}{2} u_k \right\rangle + \chi \langle \theta' \nabla^2 \theta' \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

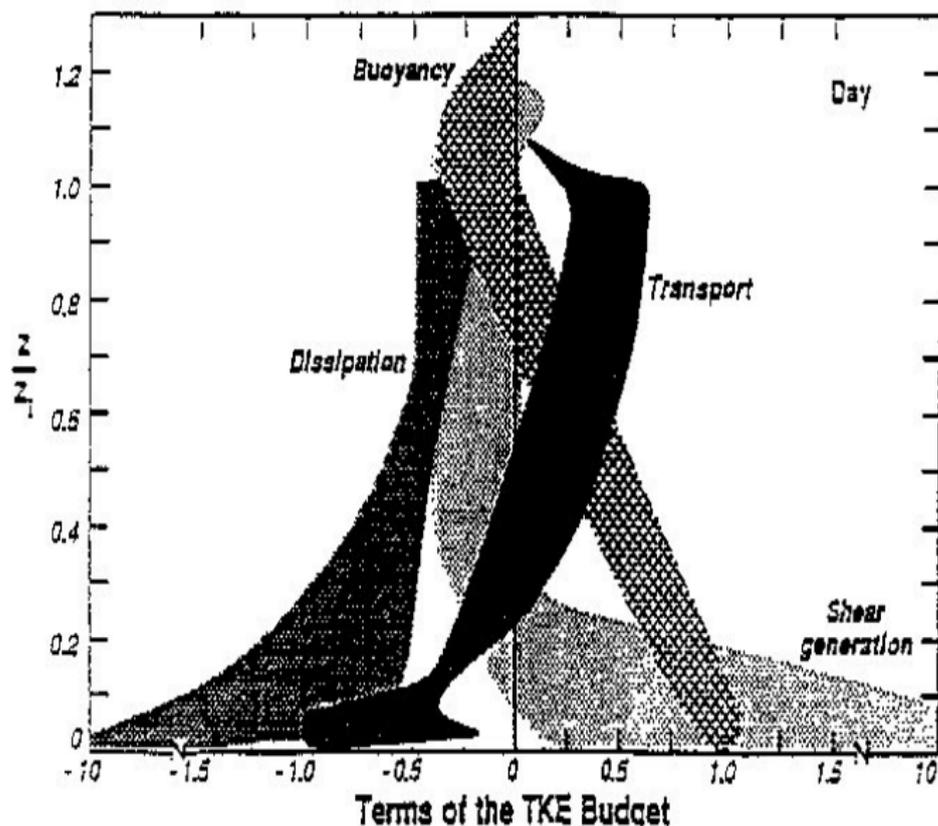
- advection par le champ moyen, production par le gradient moyen, transport par les pulsations turbulentes, diffusion moléculaire.

## Énergie cinétique

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{e}_p + U_k \partial_k \mathbf{e}_p = \tau_{ik} \partial_k U_i - \partial_k \left( \frac{1}{2} \langle u_i u_i u_k \rangle + \langle u_k p \rangle \right) \\ + \nu \nabla^2 \langle u_k u_k \rangle - 2\nu \langle (\partial_k u_i)^2 \rangle - R^{-1} \partial_k \langle u_k p \rangle + \frac{g}{\Theta} \langle u_3 \theta' \rangle \end{aligned}$$

# Bilan d'énergie dans la couche limite instable

Turbulence.  
Couche limite



Introduction

Écoulement moyen et pulsations turbulentes. Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds  
Equations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide tournant

Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs turbulence 3D

# Fermetures

Couche stationnaire **horizontalement homogène** :

$\vec{U} = (U(z), 0, 0)$ ,  $\Theta = \Theta(z)$ , seul  $\tau_{13} \neq 0$  Nombre de Richardson :

$$Ri = \frac{\frac{g}{\Theta} \partial_z \Theta}{(\partial_z U)^2}$$

Nombre de Richardson flux :

$$Ri_f = \frac{\frac{g}{\Theta} \langle u_3 \theta' \rangle}{\tau_{13} \partial_z U}$$

Fermeture de niveau 1 :

$$\tau_{13} = \nu_t \partial_z U, \quad \langle u_3 \theta' \rangle = \chi_T \partial_z \Theta, \Rightarrow R_f = \frac{\chi_T}{\nu_T} Ri$$

Couche limite **neutre** : pas de flux  $\langle u_3 \theta' \rangle$

Couche limite **non-neutre** : longueur caractéristique de Monin-Obukhov :

$$L_{MO} \sim \frac{u_*^3}{\frac{g}{\Theta} \langle u_3 \theta' \rangle} \sim \frac{u_*^2}{\frac{g}{\Theta} \theta'} \quad (17)$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée

Couche limite dans le fluide  
tournantTurbulence  
développéeCascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Similitude de Monin-Obukhov

Hypothèse de Monin-Obukhov : Toute caractéristique non-dimensionnelle ne depend que de  $\xi = \frac{z}{L_{MO}}$ . Alors

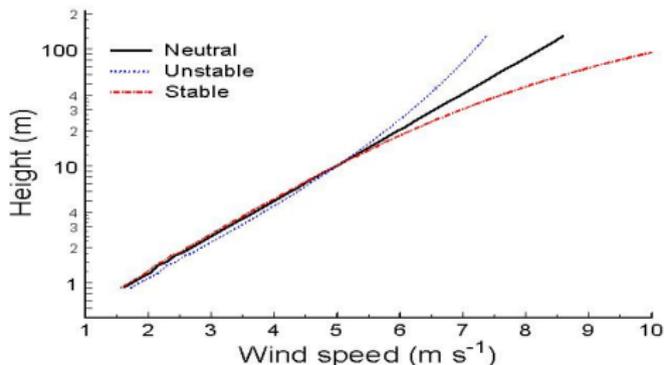
$$\partial_z U = \frac{u_*}{z} \Phi_U(\xi), \quad \partial_z \Theta = \frac{\theta_*}{z} \Phi_\Theta(\xi),$$

où  $\Phi_{U,\Theta}$  - fonctions universelles.

Couches proches de neutralité :

$$\Phi(\xi) = 1 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2$$

Observations :



Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée

Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Écoulement hydrostatatique du fluide incompressible en équilibre géostrophique près de la surface

## Équations de mouvement

$$\begin{aligned}
 -fv &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p + \nu_T \partial_{zz}^2 u, \\
 +fu &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_y p + \nu_T \partial_{zz}^2 v, \\
 g &= -\partial_z p
 \end{aligned} \tag{18}$$

## Conditions aux limites

Écoulement libre :  $\vec{v} = (U, 0) \Rightarrow$  condition limite pour  $(u, v)$  à  $z \rightarrow \infty$ . Condition limite à  $z = 0$  - absence de glissement :  $(u, v) = 0$ .

Hauteur caractéristique :  $\sim \sqrt{\frac{\nu_T}{f}}$ .

Introduction

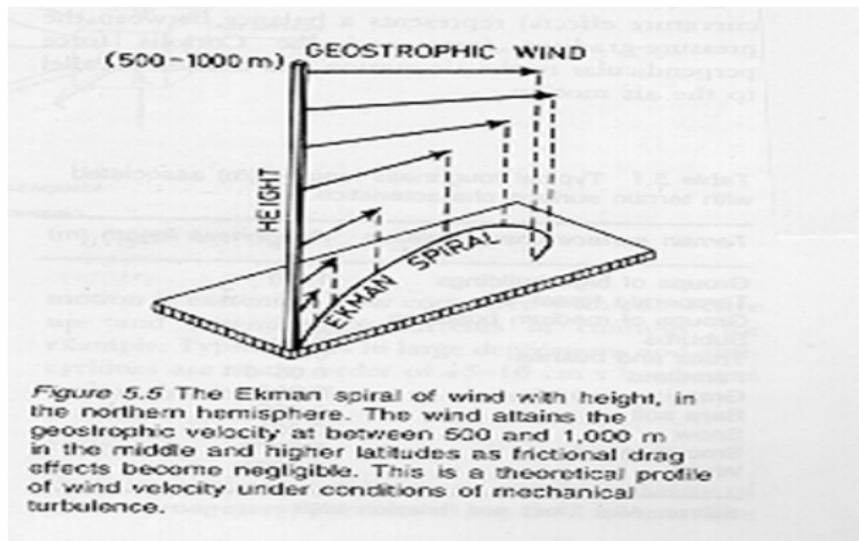
Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
ReynoldsExpériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournantTurbulence  
développéeCascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Exercice : spirale d'Ekman

À partir des équations de mouvement et conditions aux limites obtenir la solution  $u(z)$ ,  $v(z)$  des équations (18).



Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Cascade d'énergie entre échelles

- ▶ **Turbulence développée** : mouvements à toutes les échelles impliqués.
- ▶ Mouvements de **grande échelle** - porteurs d'énergie : vitesse caractéristique  $U$ , échelle spatiale  $L$ , échelle temporelle  $T \sim L/U$ . Nombre de Reynolds **global**  $Re = UL/\nu$ .
- ▶ Mouvements de **petite échelle** - pulsations turbulentes : vitesse caractéristique  $u_\lambda$ , échelle spatiale  $\lambda$ . Nombre de Reynolds **local**  $Re_\lambda = u_\lambda \lambda / \nu$ .
- ▶ **Viscosité** : entre en jeu à l'échelle  $\eta$  :  $Re_\eta \sim 1$  ; l'énergie est dissipée au-delà.

Entre les grandes et petites échelles - **cascade d'énergie** (Richardson)  $\Leftrightarrow$  **intervalle d'inertie** (Kolmogorov).

Introduction

Écoulement moyen et pulsations turbulentes.  
Équations de Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide tournant

Turbulence développée

Cascade d'énergie, lois d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs turbulence 3D

# Intervalle d'inertie et l'intervalle visqueux

Intervalle d'inertie  $\Leftrightarrow$  **flux d'énergie constant**. Flux d'énergie définie par les grands échelles (pompage) = énergie dissipée par seconde dans l'unité de masse du fluide  $\epsilon \Rightarrow$  seul paramètre dans l'intervalle d'inertie  $\eta \ll \lambda \ll L$ . Échelles plus petite - **intervalle visqueux** avec les échelles caractéristiques construites avec la viscosité moléculaire :

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad v_\eta \sim (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad \tau_\eta \sim \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad (19)$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

Loi de **Kolmogorov - Obukhov** :

$$u_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{\frac{1}{3}}$$

**Auto-similitude** des pulsations turbulentes :  $u_\lambda \sim U \left(\frac{\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

$L$  - échelle **externe** de la turbulence,  $\eta$  - échelle **interne**.

Dissipation à l'échelle  $\eta \leftrightarrow Re_\eta \sim 1 \Rightarrow$

$$\frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim 1 \Rightarrow \frac{U \eta^{\frac{4}{3}}}{\nu L^{\frac{1}{3}}} = Re \left(\frac{\eta}{L}\right)^{\frac{4}{3}} \sim 1 \Rightarrow \eta \sim L Re^{-\frac{3}{4}}$$

Analogiquement  $u_\eta \sim U Re^{-\frac{1}{4}}$ . Estimation du nombre de degrés de liberté actifs :

$$\mathcal{N} \sim \left(\frac{k_\eta}{K}\right)^3 \sim \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim Re^{\frac{9}{4}}$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

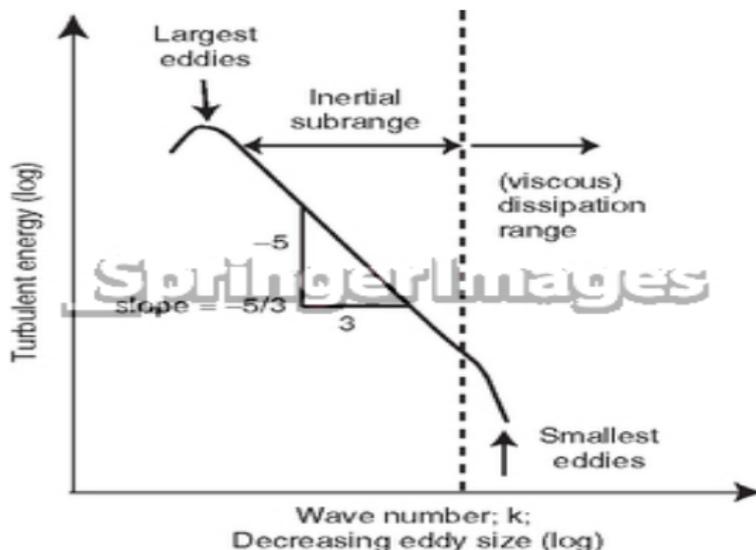
## Spectres d'énergie

Énergie cinétique des pulsations - "loi de 2/3" :

$$E_\lambda \sim u_\lambda^2 \sim (\epsilon \lambda)^{\frac{2}{3}}$$

Énergie du point de vue spectral : énergie contenue dans les modes de Fourier avec  $k > k_\lambda \sim \frac{1}{\lambda}$  :

$$E_\lambda \sim \int_{1/\lambda}^{\infty} E(k) dk, E(k) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$



Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
ReynoldsExpériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

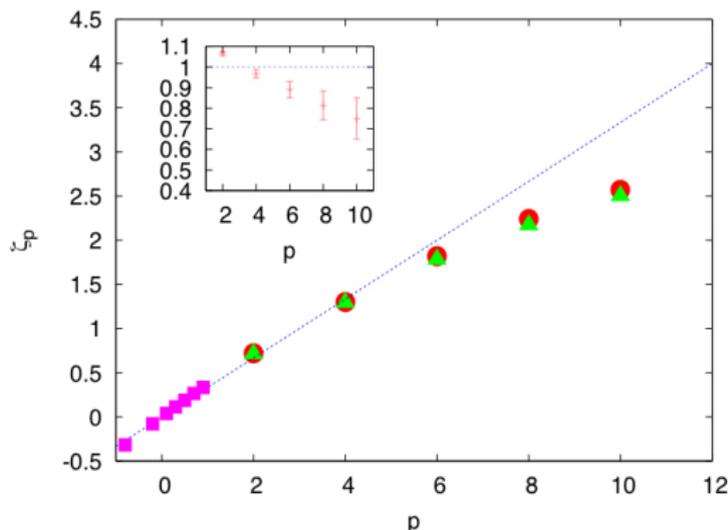
Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournantTurbulence  
développéeCascade d'énergie, lois  
d'échellesDiffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Intermittence

Expression de  $u_\lambda$  en termes de corrélations :

$$u_\lambda \sim \left\langle (\vec{v}(\mathbf{x}_1) - \vec{v}(\mathbf{x}_2))^2 \right\rangle^{1/2}, \quad |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \lambda$$

Prolongement de l'argument de Kolmogorov-Obukhov - tout moment de l'ordre  $p$  doit suivre la loi d'échelle en  $p/3$ . Déviations - **intermittence** :



Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Loi de Richardson

Turbulence homogène, isotrope dans l'intervalle d'inertie  
 → pour la **séparation moyenne** entre deux parcelle du fluide  $\lambda$  :

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\epsilon\lambda)^{1/3} \Rightarrow \lambda \sim \epsilon^{1/2} t^{3/2}$$

Diffusion **anormale**, beaucoup **plus rapide** que la diffusion moléculaire :  $\lambda \sim t^{1/2}$ .

Coefficient de diffusion :

$$K = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \lambda^2 \rangle \sim \epsilon^{1/3} \lambda^{4/3}$$

Diamètre caractéristique d'un nuage de polluant  $\sim t^{3/2}$



Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Hydrodynamique 2D

Fluide visqueux incompressible 2D - équation pour la fonction de courant  $\psi$  :

$$\partial_t \nabla^2 \psi + \mathcal{J}(\nabla^2 \psi, \psi) = \nu \nabla^4 \psi \quad (20)$$

En **absence de dissipation** - conservation de l'énergie  $E$  et de l'énstrophie  $\Omega$

$$E = \int d\mathbf{x} (\nabla \psi(\mathbf{x}))^2, \quad \Omega = \int d\mathbf{x} (\nabla^2 \psi(\mathbf{x}))^2.$$

Espace de Fourier :  $\psi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k} \psi(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rightarrow$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{k}^2 + \nu \mathbf{k}^4) \partial_t \psi(\mathbf{k}, t) + \\ & \int d\mathbf{m} d\mathbf{l} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{m} - \mathbf{l}) \mathbf{m}^2 (\mathbf{m} \wedge \mathbf{l}) \psi(\mathbf{m}, t) \psi(\mathbf{l}, t) = 0. \end{aligned}$$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Théorème de Fjortoft

Énergie et enstrophie :

$$E = \int_0^{\infty} dk E(k), \quad \Omega = \int_0^{\infty} dk k^2 E(k)$$

Pour une **triade** de modes de Fourier

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \text{const}, \quad \Omega = k_1^2 E_1 + k_2^2 E_2 + k_3^2 E_3 = \text{const}$$

Pour respecter les lois de conservation l'énergie (l'enstrophie) du mode médiane doit aller vers le mode avec le  $k$  moins (plus) élevé.

## Exercice

Vérifier le théorème avec une triade  $\mathbf{k}_1, a\mathbf{k}_1, b\mathbf{k}_1$ ,  $b > a$

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

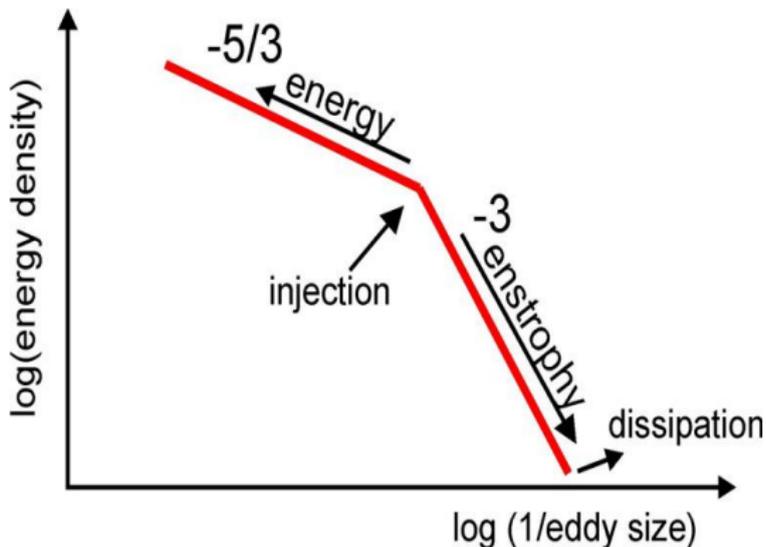
Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion  
Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Lois d'échelle

- ▶ Cascade **inverse** d'énergie  $E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ , flux spectral d'énergie  $\epsilon = \text{const}$
- ▶ Cascade **direct** d'entrophie  $E(k) \propto \beta^{2/3} k^{-3}$ , flux spectral d'entrophie  $\beta = \text{const}$



Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles

Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

# Cascade inverse dans la turbulence 2D : champ de vorticité

Turbulence.  
Couche limite

Introduction

 coulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
 quations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
 quations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

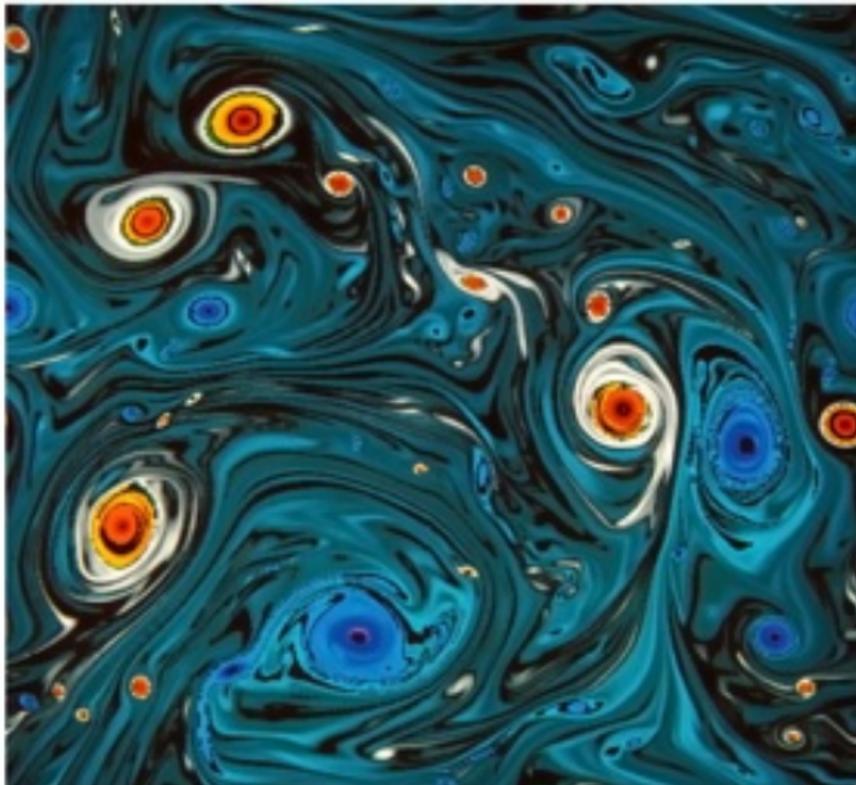
Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D



# Cascade directe dans la turbulence 3D : champ de vorticité

Turbulence.  
Couche limite

Introduction

Écoulement  
moyen et  
pulsations  
turbulentes.  
Équations de  
Reynolds

Expériences de Reynolds  
Équations de Reynolds  
Problème de fermeture.  
Viscosité turbulente

Couche limite

Couche limite stratifiée  
Couche limite dans le fluide  
tournant

Turbulence  
développée

Cascade d'énergie, lois  
d'échelles  
Diffusion

Turbulence 2D vs  
turbulence 3D

